HANDBOEK DER RADIOTECHNIEK

HANDBOEK
DER RADIOTECHNIEK

DEEL 1

HANDBOEK DER RADIOTECHNIEK

Samengesteld door

RENS & RENS

Directeuren der Middelbare Technische School voor Radiotechniek te Hilversum

Met medewerking van

Ir TH. J. WEIJERS

Hoofdingenieur der N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken te Eindhoven
Voorz. van de examencommissie voor de examens radiotechnicus en radiomonteur uitgaande van het Nederlands Radiogenootschap

Ir J. M. VAN HOFWEEGEN

Ingenieur der N.V. Philips' Gloeilampenfabrieken te Eindhoven
Lid van de examencommissie voor de examens radiotechnicus en radiomonteur uitgaande van het Nederlands Radiogenootschap

en meer dan 60 vooraanstaande ingenieurs,
wis- en natuurkundigen en technici

N.V. UITGEVERS-MAATSCHAPPIJ Æ. E. KLUWER
DEVENTER - DJAKARTA

DEEL 1

WISKUNDIGE, NATUURKUNDIGE EN ELECTROTECHNISCHE GRONDSLAGEN

N.V. UITGEVERS-MAATSCHAPPIJ Æ. E. KLUWER
DEVENTER - DJAKARTA

VOORBERICHT

Bij de samenstelling van het Handboek der Radiotechniek heeft als richtlijn gediend, dat het een zeer groot deel der radiotechniek zou moeten bestrijken.

Om het boek bruikbaar te doen zijn voor een zo groot mogelijke lezerskring is het niveau van het boek zodanig gekozen, dat de stof in het algemeen door de radiotechnicus kan worden gevolgd. Een enkele maal is, waar dit van belang bleek, wat dieper op de stof ingegaan en is gebruik gemaakt van meer wiskunde dan van de radiotechnicus vereist wordt. De tekst is in deze gevallen in kleine letter gedrukt en kan eventueel door de minder wiskundig onderlegde lezer worden overgeslagen, zonder dat dit stoort bij het doorwerken van het geheel.

Ten gevolge van het grote gebied, dat het handboek bestrijkt, is, om tot een technisch verantwoord geheel te komen, de medewerking van meer dan 60 auteurs, allen specialisten op hun terrein, nodig geweest. Vooral aan de volgorde van behandeling van de onderwerpen en de indeling daarvan over de verschillende delen is grote aandacht besteed. Dit heeft ten gevolge gehad, dat geheel is gebroken met de traditionele volgorde van behandeling der onderwerpen, hetgeen er toe heeft bijgedragen, dat ondanks de grote omvang van het gehele werk toch een overzichtelijk geheel is verkregen. Hierdoor is het handboek als naslagwerk zeer bruikbaar geworden, wat tevens nog wordt bevorderd door een uitgebreide index aan het einde van elk deel.

Het handboek bestaat uit de volgende zeven delen:

Deel 1: a. Wiskundige, natuurkundige en electrotechnische grondslagen.
Deel 2: Radiotechnische grondslagen.
Deel 3: Ontvangers en versterkers.
Deel 4: a. Zenders - *b.* Antennes.
Deel 5: a. Zenders voor speciale doeleinden - *b.* Omroepproblemen - *c.* Radiodistributie.
Deel 6: a. Televisie - *b.* Radar.
Deel 7: a. Meetapparaten - *b.* Metingen.

Wij brengen gaarne dank aan allen, die hebben medegewerkt aan de totstandkoming van dit handboek en wel in het bijzonder aan de auteurs, waarmede wij zonder uitzondering steeds prettig hebben mogen samenwerken.

Aan de grote bedrijven en de verschillende instellingen, waarvan wij vele gegevens ter publicatie ontvingen, zijn wij grote dank verschuldigd en wij zijn hen zeer erkentelijk voor de verleende medewerking.

De heren Ir Th. J. Weijers en Ir J. M. van Hofweegen, brengen wij hier gaarne alle lof, die hun toekomt voor de hulp welke wij bij de samenstelling van het handboek van hen mochten ontvangen. Het is zeer zeker mede aan hun voortreffelijke medewerking te danken, dat dit handboek tot stand is gekomen.

Betreffende hoofdstuk IX van deel I merken we op, dat spanningen niet zijn aangeduid met de letter *V*, doch met de letter *U*, zoals meer en meer gebruikelijk wordt. Het voordeel hiervan is, dat voor de aanduiding van de grootte van een spanning een andere letter dienst doet dan voor de aanduiding van de eenheid van spanning, de volt (V). Dit is analoog met hetgeen bij stromen gebruikelijk is: de letter *I* voor aanduiding van de grootte van een stroom en de letter *A* voor aanduiding van de eenheid van stroom, de ampère. De letter *E* wordt gebruikt om de electrische veldsterkte aan te duiden.

De wijze van behandeling van de electriciteitsleer is er op gericht, te komen tot het eenhedenstelsel van Giorgi, het enige eenhedenstelsel, dat logisch en paedagogisch verantwoord is. Verschillende moeilijkheden in de electriciteitsleer, die door de ouderwetse eenhedenstelsels kunstmatig werden geïntroduceerd, bestaan hierbij niet. Al zijn deze oude stelsels uit de historische ontwikkeling verklaarbaar, het komt ons gewenst voor, dat deze zo spoedig mogelijk tot de historie gaan behoren. Het onderwijs in de electriciteitsleer wordt dan zowel voor leraar als voor leerling eenvoudiger.

Rest ons tenslotte nog een dankwoord te brengen aan de N.V. Uitgevers-Maatschappij Æ. E. Kluwer te Deventer voor de keurige uitvoering.

Gaarne spreken wij de hoop uit, dat de belangstelling voor het Handboek der Radiotechniek groot moge zijn en dat met dit boek de Nederlandse literatuur is verrijkt met een werk, dat in een behoefte voorziet. Voor opbouwende critiek houden wij ons gaarne aanbevolen.

Hilversum, September 1953. RENS & RENS

MEDEWERKERS AAN DEEL 1:

Ir P. CORNELIUS
Ir J. M. van HOFWEEGEN
C. RENS
H. RENS
H. van SANTEN
Ir Th. J. WEIJERS

INHOUD

I. OVERZICHT DER GONIOMETRIE

1. Definities

Een hoek kunnen we meten in *graden*. Een rechte hoek wordt verdeeld in 90 graden (90°), een graad in 60 minuten (60′) en een minuut in 60 secunden (60″). Ook kunnen we een hoek meten in *radialen*, waarbij 1 radiaal (aangeduid door 1 rad) de hoek is, die staat op een cirkelboog, waarvan de lengte gelijk is aan de straal (fig. 1).

$$1 \text{ rad} = 57° \, 17' \, 44{,}80625'' \quad .. \, (1)$$

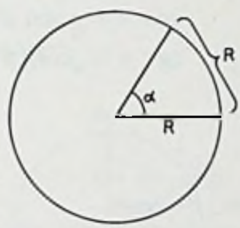


Fig. 1. De hoek α is 1 radiaal.

Van een cirkel met een straal R is de omtrek $2\pi R$.
Hieruit volgt o.a.:

$$\left.\begin{aligned} 30° &= \frac{\pi}{6} \text{ rad;} \\ 45° &= \frac{\pi}{4} \text{ rad;} \\ 60° &= \frac{\pi}{3} \text{ rad;} \\ 90° &= \frac{\pi}{2} \text{ rad;} \\ 180° &= \pi \text{ rad;} \\ 360° &= 2\pi \text{ rad.} \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots \, (2)$$

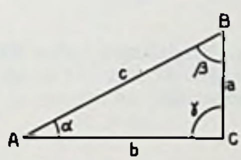


Fig. 2. Rechthoekige driehoek met de zijden a, b en c, de hoekpunten A, B en C en de hoeken α, β en γ.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \; \cos \alpha = \frac{b}{c}; \; \text{tg } \alpha = \frac{a}{b};$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{b}{a}; \; \sec \alpha = \frac{c}{b}; \; \text{cosec } \alpha = \frac{c}{a}.$$

In een rechthoekige driehoek ABC (fig. 2) met de zijden a, b en c, en de hoeken α, β en γ, noemt men $\frac{a}{c}$ de sinus, $\frac{b}{c}$ de cosinus, $\frac{a}{b}$ de tangens, $\frac{b}{a}$ de cotangens, $\frac{c}{b}$ de secans en $\frac{c}{a}$ de cosecans van de hoek α. Men noemt deze de goniometrische verhoudingen van de hoek α. Deze

woorden worden niet voluit geschreven, doch afgekort tot sin, cos, tg, cotg, sec en cosec, zonder punt achter deze afkortingen. Dus:

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{a}{c}\,; & \operatorname{cosec}\alpha &= \frac{c}{a}\,; \\ \cos\alpha &= \frac{b}{c}\,; & \sec\alpha &= \frac{c}{b}\,; \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{a}{b}\,; & \operatorname{cotg}\alpha &= \frac{b}{a}\,. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Door op overeenkomstige wijze de goniometrische verhoudingen van de hoek β (fig. 2) op te schrijven, blijkt, dat

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \cos\beta; & \operatorname{cotg}\alpha &= \operatorname{tg}\beta; \\ \cos\alpha &= \sin\beta; & \operatorname{cosec}\alpha &= \sec\beta; \\ \operatorname{tg}\alpha &= \operatorname{cotg}\beta; & \sec\alpha &= \operatorname{cosec}\beta. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

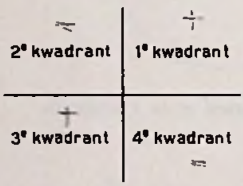


Fig. 3. Verdeling van het vlak in vier kwadranten.

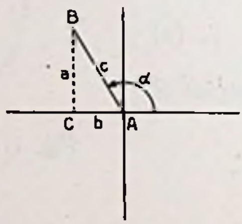


Fig. 4. Een hoek α in het 2e kwadrant.

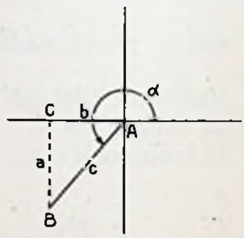


Fig. 5. Een hoek α in het 3e kwadrant.

De hoeken α en β zijn elkaars complement; cosinus is een afkorting voor complements-sinus (de sinus van het complement). Op dezelfde wijze zijn de woorden cotangens en cosecans gevormd.

Het platte vlak wordt verdeeld in vier *kwadranten,* die worden genummerd zoals fig. 3 aangeeft. Voor een hoek α in het eerste kwadrant gelden de betrekkingen (3). Voor een hoek α in het tweede kwadrant (fig. 4) is

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{a}{c}\,; & \operatorname{cosec}\alpha &= \frac{c}{a}\,; \\ \cos\alpha &= -\frac{b}{c}\,; & \sec\alpha &= -\frac{c}{b}\,; \\ \operatorname{tg}\alpha &= -\frac{a}{b}\,; & \operatorname{cotg}\alpha &= -\frac{b}{a}\,. \end{aligned}$$

Voor een hoek α in het derde kwadrant (fig. 5) is

$$\sin \alpha = -\frac{a}{c}\,; \qquad \operatorname{cosec} \alpha = -\frac{c}{a}\,;$$

$$\cos \alpha = -\frac{b}{c}\,; \qquad \sec \alpha = -\frac{c}{b}\,;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}\,; \qquad \operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}\,.$$

Voor een hoek α in het vierde kwadrant (fig. 6) is

$$\sin \alpha = -\frac{a}{c}\,; \qquad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{b}\,;$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}\,; \qquad \sec \alpha = -\frac{c}{a}\,;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{a}{b}\,; \qquad \operatorname{cotg} \alpha = -\frac{b}{a}\,.$$

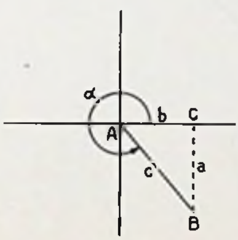


Fig. 6. Een hoek α in het 4e kwadrant.

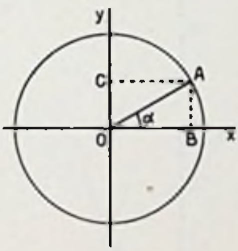


Fig. 7. Een cirkel met de straal 1; sin α is de projectie OC van OA op de y-as; cos α is de projectie OB van OA op de x-as.

Tabel I geeft de tekens der goniometrische verhoudingen aan voor de vier kwadranten.

Tabel I

	1e kw.	2e kw.	3e kw.	4e kw.
sin	+	+	—	—
cos	+	—	—	+
tg	+	—	+	—
cotg	+	—	+	—
sec	+	—	—	+
cosec	+	+	—	—

De tekens volgens tabel I kunnen we gemakkelijk onthouden op de volgende wijze. We tekenen een rechthoekig assenkruis (fig. 7) en

nemen het snijpunt O der assen als hoekpunt, noemen de horizontale as de x-as en de verticale as de y-as, rekenen de afstanden op de x-as vanaf O (de oorsprong) naar rechts positief, naar links negatief, en op de y-as naar boven positief en naar beneden negatief. We leggen een

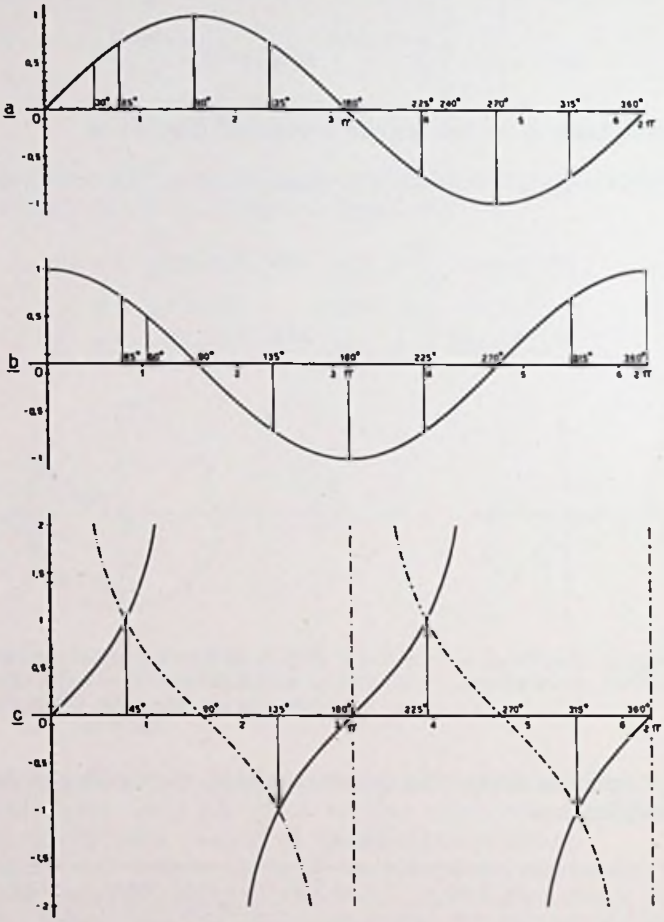


Fig. 8. De goniometrische verhoudingen als functie van de hoek; boven de horizontale as is de hoek in graden, onder deze as in radialen aangegeven. a. sin α; b. cos α; c. de getrokken lijn: tg α, de streep-punt-lijn: cotg α.

been van de hoek langs de positieve x-as en laten het andere been, dat de lengte 1 heeft, draaien om O. De sinus van de hoek AOB is nu de projectie van OA op de y-as; de cosinus is de projectie op de x-as. Valt de projectie op het positieve deel van de as, dan is de goniometrische verhouding positief, valt de projectie op het negatieve deel

van de as, dan is de goniometrische verhouding negatief. De tangens en de cotangens zijn positief, als de sinus hetzelfde teken heeft als de cosinus; in het andere geval zijn ze negatief. De secans heeft hetzelfde teken als de cosinus; de cosecans heeft hetzelfde teken als de sinus.

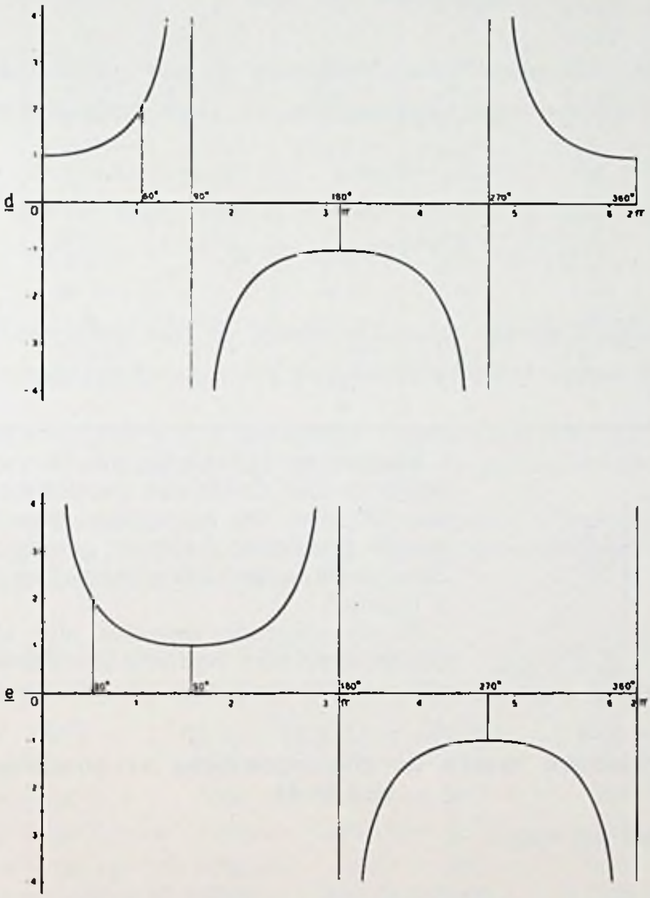


Fig. 8. De goniometrische verhoudingen als functie van de hoek; boven de horizontale as is de hoek in graden, onder deze as in radialen aangegeven. d. sec α; e. cosec α.

In fig. 8 zijn sin α, cos α, tg α, cotg α, sec α en cosec α als functie van α uitgezet.

Tabel II geeft de goniometrische verhoudingen voor een aantal eenvoudige gevallen. (Zie blz. 6.)

Tabel II

	sin	cos	tg	cotg	sec	cosec
0°	0	1	0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
90°	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
120°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
135°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
180°	0	-1	0	$\pm\infty$	-1	$\pm\infty$
210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
225°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
240°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	-2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
270°	-1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	-1
300°	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
315°	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	-2
360°	0	1	0	$\pm\infty$	1	$\pm\infty$

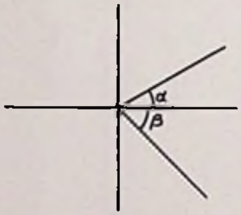


Fig. 9. De hoek α is positief; de hoek β negatief.

Plaatsen we de hoek met een been vanaf het hoekpunt naar rechts, dan noemen we de hoek van dit been tot het andere been linksom gaande positief en rechtsom gaande negatief. Zo is in fig. 9 de hoek α positief en de hoek β negatief.

Al de volgende formules zijn algemeen geldig; zowel voor positieve als negatieve hoeken, en voor hoeken in alle vier kwadranten.

2. Betrekkingen tussen de goniometrische verhoudingen van een hoek

Uit form. (3) volgt:

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}; \qquad \sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}; \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \operatorname{cotg}(90° - \alpha); & \operatorname{cosec}\alpha &= \sec(90° - \alpha);\\ \sin\alpha &= \cos(90° - \alpha); & \sec\alpha &= \operatorname{cosec}(90° - \alpha);\\ \cos\alpha &= \sin(90° - \alpha); & \operatorname{cotg}\alpha &= \operatorname{tg}(90° - \alpha). \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (6)$$

[Deze formules zijn eigenlijk dezelfde als de formules (4).]

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

Volgens de stelling van Pythagoras is in de rechthoekige driehoek van fig. 1: $a^2 + b^2 = c^2$. Hieruit volgt:

$$\left.\begin{aligned} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1;\\ 1 + \mathrm{tg}^2\alpha &= \sec^2\alpha;\\ 1 + \mathrm{cotg}^2\alpha &= \mathrm{cosec}^2\alpha. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

3. Herleiding van de goniometrische verhoudingen van negatieve hoeken naar de gelijknamige van positieve hoeken

$$\left.\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha; & \sec(-\alpha) &= \sec\alpha;\\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha; & \mathrm{cosec}(-\alpha) &= -\mathrm{cosec}\,\alpha;\\ \mathrm{tg}(-\alpha) &= -\mathrm{tg}\,\alpha; & \mathrm{cotg}(-\alpha) &= -\mathrm{cotg}\,\alpha. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (9)$$

4. Herleiding van de goniometrische verhoudingen van willekeurige hoeken tot die van hoeken in het eerste kwadrant

Wordt een hoek α met een geheel veelvoud van 360° (= 2π) vermeerderd of verminderd, dan veranderen de goniometrische verhoudingen niet.

Wordt een hoek α met 180° (= π) vermeerderd of verminderd, dan blijven tg α en cotg α onveranderd; de overige goniometrische verhoudingen krijgen het tegengestelde teken.

$$\left.\begin{aligned} \sin(\alpha \pm 180°) &= -\sin\alpha; & \mathrm{cosec}(\alpha \pm 180°) &= -\mathrm{cosec}\,\alpha;\\ \cos(\alpha \pm 180°) &= -\cos\alpha; & \sec(\alpha \pm 180°) &= -\sec\alpha;\\ \mathrm{tg}(\alpha \pm 180°) &= \mathrm{tg}\,\alpha; & \mathrm{cotg}(\alpha \pm 180°) &= \mathrm{cotg}\,\alpha. \end{aligned}\right\} \quad .. (10)$$

$$\left.\begin{aligned} \sin(\alpha + 90°) &= \cos\alpha; & \sin(\alpha - 90°) &= -\cos\alpha;\\ \cos(\alpha + 90°) &= -\sin\alpha; & \cos(\alpha - 90°) &= \sin\alpha;\\ \mathrm{tg}(\alpha + 90°) &= -\mathrm{cotg}\,\alpha; & \mathrm{tg}(\alpha - 90°) &= -\mathrm{cotg}\,\alpha;\\ \mathrm{cosec}(\alpha + 90°) &= \sec\alpha; & \mathrm{cotg}(\alpha - 90°) &= -\mathrm{tg}\,\alpha;\\ \sec(\alpha + 90°) &= -\mathrm{cosec}\,\alpha; & \sec(\alpha - 90°) &= \mathrm{cosec}\,\alpha;\\ \mathrm{cotg}(\alpha + 90°) &= -\mathrm{tg}\,\alpha; & \mathrm{cosec}(\alpha - 90°) &= -\sec\alpha. \end{aligned}\right\} \quad .. (11)$$

De formules (10) en (11) kunnen weer gemakkelijk worden onthouden met behulp van fig. 7.

Met behulp van de form. (9), (10) en (11) kunnen de goniometrische verhoudingen van willekeurige hoeken worden herleid tot die van hoeken in het 1e kwadrant.

5. De goniometrische verhoudingen van de som of het verschil van twee hoeken

$$\left.\begin{array}{l}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;\\ \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;\\ \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;\\ \operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\quad \operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.\end{array}\right|\ \ldots(12)$$

6. De goniometrische verhoudingen van de dubbele en van de halve hoek

$$\left.\begin{array}{l}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;\\ \operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.\end{array}\right|\ \ldots(13)$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin\tfrac{1}{2}\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}};\\ \cos\tfrac{1}{2}\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}};\\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.\end{array}\right|\ \ldots\ldots\ldots\ldots(14)$$

De formules (13) volgen uit de formules (12) door $\beta=\alpha$ te stellen; de formules (14) volgen uit de formules (13).

7. Herleiding van sin $n\alpha$ en cos $n\alpha$

Door $n\alpha$ te schrijven als $p\alpha+(n-p)\alpha$ en dan de formules (12) enige malen toe te passen, kunnen $\sin n\alpha$ en $\cos n\alpha$ worden uitgedrukt in $\sin\alpha$ en $\cos\alpha$. Zo vindt men bv.

$$\left.\begin{array}{l}\sin 3\alpha=-4\sin^3\alpha+3\sin\alpha;\\ \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

In hfdst. IV wordt nog een andere methode aangegeven voor deze herleiding, nl. met behulp van de stelling van De Moivre [hfdst. IV form. (20)].

8. Optellen en aftrekken van gelijknamige goniometrische verhoudingen

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin {}^1/_2(\alpha+\beta)\cos {}^1/_2(\alpha-\beta);\\ \sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin {}^1/_2(\alpha-\beta)\cos {}^1/_2(\alpha+\beta);\\ \cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos {}^1/_2(\alpha+\beta)\cos {}^1/_2(\alpha-\beta);\\ \cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin {}^1/_2(\alpha+\beta)\sin {}^1/_2(\alpha-\beta).\end{aligned}\right\} \quad \ldots (16)$$

9. Herleiding van producten van twee goniometrische verhoudingen

Door in de formules (16) $^1/_2(\alpha + \beta) = p$ en $^1/_2(\alpha - \beta) = q$ te stellen en dan de formules van rechts naar links te lezen vindt men

$$\left.\begin{aligned}2\sin p\sin q &= -\cos(p+q) + \cos(p-q);\\ 2\sin p\cos q &= \sin(p+q) + \sin(p-q);\\ 2\cos p\cos q &= \cos(p+q) + \cos(p-q).\end{aligned}\right\} \quad \ldots . (17)$$

10. De sinus-, de cosinus- en de tangensregel

In iedere driehoek ABC met de zijden a, b en c en de hoeken α, β en γ (fig. 10) geldt

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} \text{ (sinusregel)}; \quad \ldots\ldots (18)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \text{ (cosinusregel)}; \quad (19)$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} {}^1/_2(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg} {}^1/_2(\alpha-\beta)} \text{ (tangensregel)}; \quad \ldots . (20)$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \ldots . (21)$$

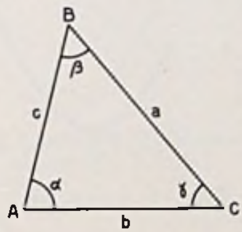


Fig. 10. Scheefhoekige driehoek.

waarin $s = {}^1/_2(a + b + c)$ = de halve omtrek van de driehoek.

11. Herleiding van $a \sin x + b \cos x$

In de wisselstroomtheorie ontmoeten we herhaaldelijk de vorm $a \sin x + b \cos x$ [zie Deel 2, hfdst. III.A.4, form. (20)]. Deze herleiden we als volgt.

$$A = a\sin x + b\cos x = a\left(\sin x + \frac{b}{a}\cos x\right).$$

We stellen: $$\frac{b}{a} = \text{tg } \varphi. \qquad (22)$$

Daar tg φ alle waarden van $-\infty$ tot $+\infty$ kan aannemen, is dit steeds mogelijk.

$$A = a\ (\sin x + \text{tg}\,\varphi\ \cos x) = \frac{a}{\cos \varphi}\ (\sin x\ \cos \varphi + \cos x\ \sin \varphi) =$$

$$= \frac{a}{\cos \varphi}\ \sin\ (x + \varphi).$$

Daar $\cos \varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, is

$$a\ \sin x + b\ \cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\ \sin\ (x + \varphi), \qquad (23)$$

waarbij φ is gegeven door (22) (fig. 11).

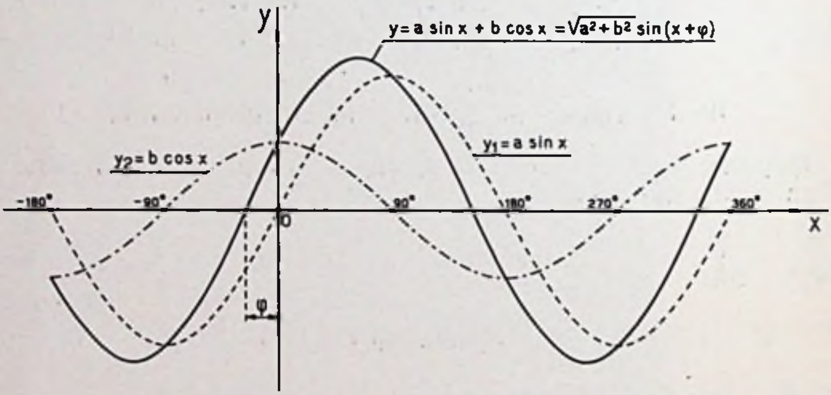


Fig. 11. $y = a\ \sin x + b\ \cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\ \sin\ (x + \varphi)$, waarbij tg $\varphi = \dfrac{b}{a}$.

Ook kan als volgt worden herleid.

$$A = a\ \sin x + b\ \cos x = b\ \left(\frac{a}{b}\ \sin x + \cos x\right).$$

Stel nu $$\frac{a}{b} = \text{tg } \psi, \qquad (24)$$

$$\text{dus } \cos \psi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$A = b\ (\text{tg } \psi\ \sin x + \cos x) = \frac{b}{\cos \psi}\ (\sin x\ \sin \psi + \cos x\ \cos \psi) =$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2}\ \cos\ (x - \psi). \qquad (25)$$

12. $\sin x < x < \operatorname{tg} x$

Een eigenschap, waar we enkele malen nog gebruik van maken, luidt, dat voor hoeken in het 1e kwadrant ($x < \frac{\pi}{2}$) x groter is dan $\sin x$ en kleiner dan $\operatorname{tg} x$, indien x wordt uitgedrukt in radialen. Dit volgt uit een beschouwing van fig. 12. Daar is een cirkel getekend met een straal, waarvan we de lengte als eenheid nemen. De hoek BOA noemen we x, uitgedrukt in radialen. De boog AB is dan ook x; $\sin x = \frac{BC}{OB} = BC$; $\operatorname{tg} x = \frac{DA}{OA} = DA$. Het oppervlak van $\triangle$ OAD is $^1/_2\, OA \times AD = {^1/_2} \operatorname{tg} x$; het oppervlak van $\triangle$ OAB is $^1/_2 \times OA \times BC = {^1/_2} \sin x$; het oppervlak van de sector OAB is $^1/_2\, OA \times$ boog $AB = {^1/_2}\, x$. Uit de figuur volgt nu $^1/_2 \sin x < {^1/_2}\, x < {^1/_2} \operatorname{tg} x$, dus ook

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x. \qquad (26)$$

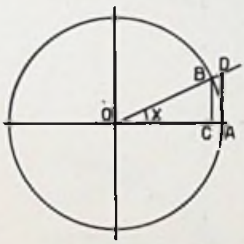


Fig. 12. Als de straal van de cirkel 1 is, is $\sin x = BC$, $\cos x = OC$, $\operatorname{tg} x = DA$ en $x =$ boog AB. $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

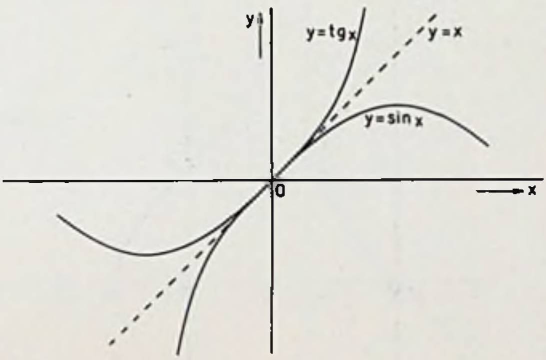


Fig. 13. $y = \sin x$ en $y = \operatorname{tg} x$ bezitten in de oorsprong dezelfde raaklijn, nl. de lijn $y = x$.

13. Limieten

Wordt x uitgedrukt in radialen, dan is

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \qquad (27)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1. \qquad (28)$$

Dit betekent, dat de raaklijn in de oorsprong ($x = 0$) aan de kromme $y = \sin x$ en ook aan de kromme $y = \operatorname{tg} x$ een hoek $\frac{\pi}{4}$ ($= 45°$) maakt met de positieve x-as (fig. 13), mits de lengte-eenheid langs beide assen gelijk wordt genomen.

14. Cyclometrische functies

Met de uitdrukking $y = \sin x$ wordt bedoeld, dat y een functie van x is. Bij iedere waarde van x behoort een waarde van y. Is echter y gegeven, dan kan men vragen naar de bijbehorende waarde of waarden van x. Dit schrijft men dan als $x = \text{bg}\sin y$ of $x = \text{arc}\sin y$ (arc is een afkorting van arcus = boog). x is de boog, waarvan de sinus y bedraagt. Men kan echter ook de boog y noemen en zijn sinus x, zodat de vorm dan wordt: $y = \text{arc}\sin x$. Evenzo kan men van

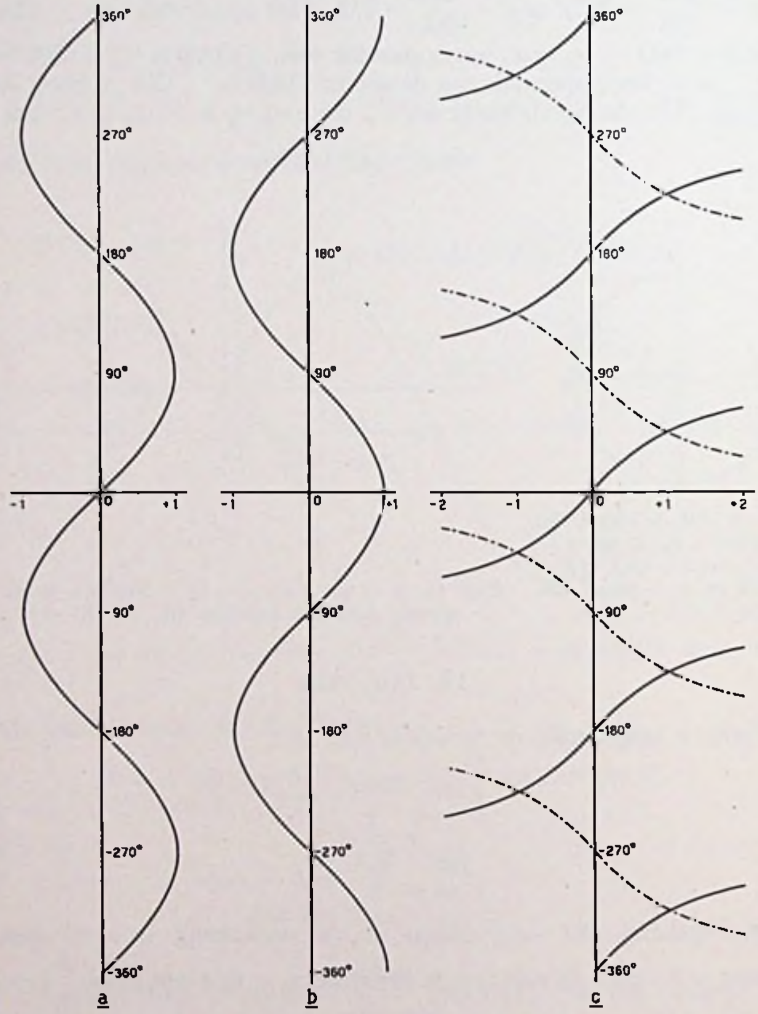


Fig. 14. De cyclometrische functies. a. $y = \text{arc}\sin x$; b. $y = \text{arc}\cos x$; c. $y = \text{arc}\,\text{tg}\, x$ (de getrokken lijn); $y = \text{arc}\,\text{cotg}\, x$ (de streep-punt-lijn);

de andere goniometrische functies de *inverse* functie beschouwen: $y = \text{arc} \cos x$, $y = \text{arc tg}\, x$, $y = \text{arc cotg}\, x$, $y = \text{arc sec}\, x$, $y =$ $= \text{arc cosec}\, x$. Deze functies worden de *cyclometrische* functies genoemd. In fig. 14 zijn deze functies aangegeven. Zij ontstaan uit fig. 8 door de horizontale as (de x-as) te verwisselen met de verticale as (de y-as). We zien, dat bij een gegeven waarde van x óf geen, óf oneindig vele waarden van y behoren. Dit laatste volgt o.a. hieruit, dat de goniometrische functies dezelfde waarde behouden, als de hoek (of de boog) met een geheel aantal malen 2π (= 360°) wordt vermeerderd of verminderd.

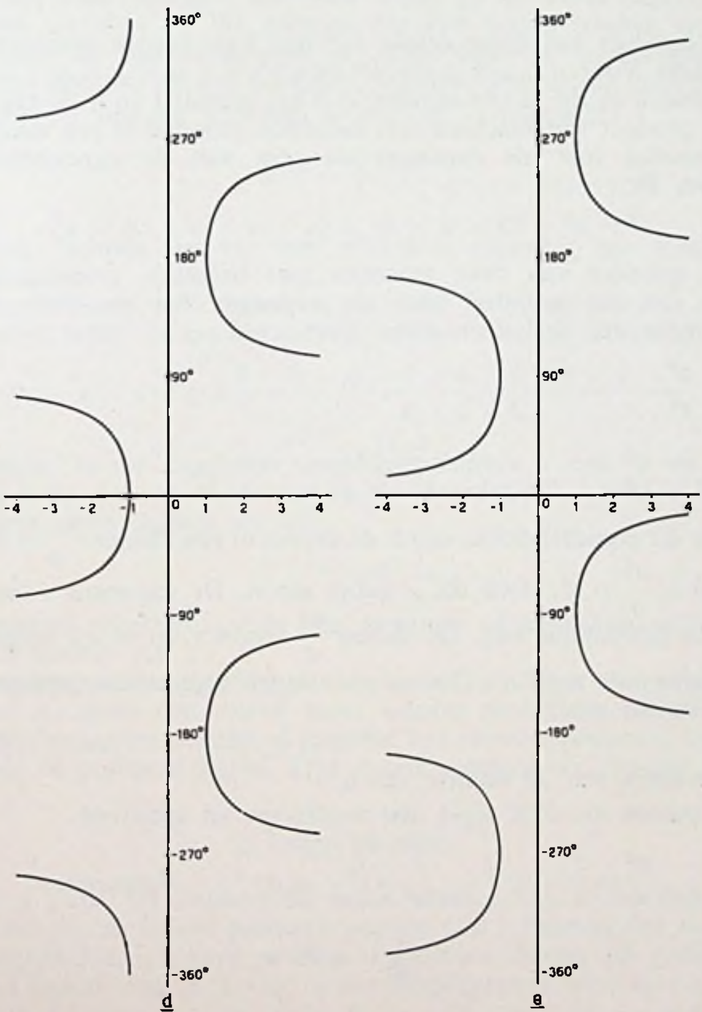


Fig. 14. De cyclometrische functies. d. $y = \text{arc sec}\, x$; e. $y = \text{arc cosec}\, x$.

II. LOGARITHMEN

1. Machten

Het product van enige gelijke factoren kan worden geschreven als een macht. Voor $2 \times 2 \times 2$ schrijft men 2^3; $a \times a \times a \times a \times a = a^5$. We noemen in dit laatste voorbeeld a het grondtal en 5 de exponent.

Het product van machten met hetzelfde grondtal is een macht van dit grondtal met als exponent de som van de exponenten der factoren. Bv.:

$$2^3 \times 2^4 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2^7.$$

Het quotiënt van twee machten met hetzelfde grondtal is een macht van dit grondtal met als exponent het verschil van de exponenten van deeltal en deler. Bv.:

$$\frac{2^7}{2^3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4.$$

Als we a^5 met a vermenigvuldigen, verkrijgen we a^6; algemeen: $a \times a^n = a^{n+1}$. Omgekeerd: als we een macht van een zeker grondtal door dit grondtal delen, wordt de exponent één kleiner; $\frac{a^n}{a} = a^{n-1}$. Evenzo is $\frac{a^2}{a} = a^1$, doch dit is gelijk aan a. De exponent 1 laten we dan ook gewoonlijk weg. De deling $\frac{a^1}{a}$ levert 1 op, doch volgens de juist genoemde regel a^0. Om nu onze regels algemenere geldigheid te geven stellen we

$$a^0 = 1, \qquad (1)$$

onafhankelijk van de waarde van a.

We passen nu onze regel nog verder toe en schrijven

$$\frac{a^0}{a} = \frac{1}{a} = a^{-1}; \quad \frac{1}{a^2} = \frac{a^{-1}}{a} = a^{-2}; \quad \text{algemeen:}$$

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}. \qquad (2)$$

We kunnen nu natuurlijk niet meer spreken van het product van $-n$ factoren a; dat heeft geen betekenis. De notatie (2) geeft alleen

een andere schrijfwijze voor $\frac{1}{a^n}$; hiermee hebben we aan een negatieve exponent bij afspraak een betekenis toegekend. Met deze afspraak kunnen we alle bewerkingen, die met machten met positieve exponenten kunnen worden uitgevoerd, ook uitvoeren, als er negatieve exponenten voor de dag komen. Bv.:

$$\frac{3^4}{3^9} = 3^{4-9} = 3^{-5} = \frac{1}{3^5}.$$

$\sqrt[3]{a^6} = a^2$, want brengen we beide leden tot de derde macht, dan verkrijgen we $a^6 = a^6$. We kunnen dus een wortel trekken uit een macht door de machtsexponent te delen door de wortelexponent. Deze regel laten we nu ook doorgaan, wanneer deze deling geen geheel getal oplevert, dus we schrijven $\sqrt[3]{a^2} = a^{2/3}$. Algemeen:

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}. \qquad (3)$$

Hiermee hebben we aan een gebroken exponent een betekenis toegekend.

We kunnen nog verder gaan en de in (2) en (3) uitgedrukte regels combineren, zodat ook een negatieve gebroken exponent betekenis krijgt.

$$a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{p/q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}. \qquad (4)$$

Op deze wijze hebben we aan

$$y = a^x \qquad (5)$$

een betekenis toegekend, voor elke positieve of negatieve, gehele of gebroken waarde van x.

We veronderstellen hierbij, dat a positief is. Als x een gebroken exponent is, zodat een wortel moet worden getrokken, die bij een even wortelexponent positief of negatief kan worden genomen, nemen we steeds de positieve wortel. Dan is ook y steeds een positief getal.

2. Logarithmen

Volgens form. (5) behoort bij iedere waarde van x één bepaalde waarde van y; bij iedere positieve waarde van y behoort één waarde van x, waarbij $a = 1$ moet worden uitgesloten. Form. (5) geeft dus y als een functie van x. In fig. 1 is (5) voorgesteld voor $a = 2$, dus $y = 2^x$.

We kunnen ook x als een functie van y opvatten. We noemen dan

x de *logarithme* van y voor het grondtal a. De hiervoor gebruikelijke schrijfwijze is

$$x = {}^{a}\log y. \qquad (6)$$

De formules (5) en (6) geven dus hetzelfde verband aan tussen x en y. We zijn gewoon, de onafhankelijk veranderlijke [in form. (5) x,

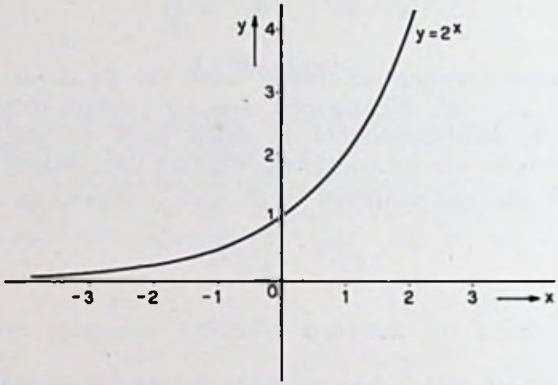


Fig. 1. $y = 2^x$.

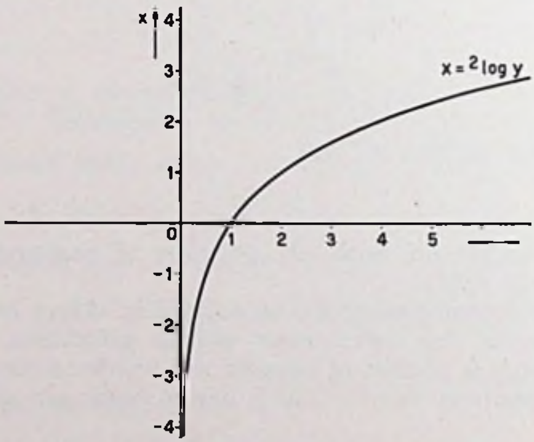


Fig. 2. $x = {}^{2}\log y$.

in form. (6) y] bij een grafische voorstelling langs de horizontale as af te zetten, en de afhankelijk veranderlijke [in form. (5) y, in form. (6) x] langs de verticale as. We krijgen dan fig. 2, waar $x = {}^{2}\log y$ is voorgesteld. De logarithme bestaat alleen van positieve getallen; negatieve getallen hebben geen logarithme, d.w.z. als a een positief getal is, is voor geen enkele waarde van x, a^x negatief. Voor ieder

grondtal a is de logarithme van 1 nul, van getallen groter dan 1 positief en van getallen kleiner dan 1 negatief. In fig. 3 is $y = {}^a\log x$ voorgesteld voor enkele verschillende grondtallen.

Onder de logarithme van een getal verstaat men dus de exponent van de macht, waartoe het grondtal moet worden verheven om het eerstgenoemde getal te verkrijgen.

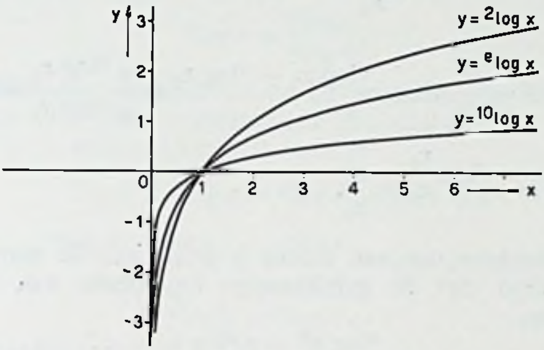


Fig. 3. $y = {}^a\log x$ voor enkele verschillende grondtallen.

Logarithmen met hetzelfde grondtal noemen we gelijknamig; logarithmen met verschillende grondtallen noemen we ongelijknamig.

3. Eigenschappen van logarithmen

De eigenschappen van logarithmen, die we toepassen bij het practisch gebruik van logarithmen, volgen uit de definitie van de logarithme: $y = {}^a\log x$ betekent hetzelfde als $a^y = x$.

a. De logarithme van een product is de som van de gelijknamige logarithmen der factoren.

$${}^a\log (x_1\, x_2) = {}^a\log x_1 + {}^a\log x_2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

In het eerste lid laten we de haakjes weg; de volgorde der bewerkingen is: eerst vermenigvuldigen, dan de logarithme nemen. Dus: ${}^a\log x_1\, x_2 = {}^a\log x_1 + {}^a\log x_2$.

Bewijs. We moeten laten zien, dat het tweede lid voldoet aan de definitie van de logarithme van $x_1\, x_2$, dus dat

$$a^{{}^a\log x_1 + {}^a\log x_2} = x_1\, x_2.$$

$$a^{{}^a\log x_1 + {}^a\log x_2} = a^{{}^a\log x_1} \times a^{{}^a\log x_2},$$

en dit is, volgens de definitie van logarithme, $x_1 \times x_2$.

Voor een product van meer factoren geldt een overeenkomstige eigenschap, bv. ${}^{a}\log x_1 x_2 x_3 x_4 = {}^{a}\log x_1 + {}^{a}\log x_2 + {}^{a}\log x_3 + {}^{a}\log x_4$.

b. De logarithme van een quotiënt is gelijk aan het verschil van de gelijknamige logarithmen van deeltal en deler.

$${}^{a}\log \frac{x_1}{x_2} = {}^{a}\log x_1 - {}^{a}\log x_2. \quad \text{(8)}$$

Bewijs.

$$a^{p-q} = \frac{a^p}{a^q}, \text{ dus } a^{{}^{a}\log x_1 - {}^{a}\log x_2} = \frac{a^{{}^{a}\log x_1}}{a^{{}^{a}\log x_2}} = \frac{x_1}{x_2}.$$

Doch ook is $a^{{}^{a}\log \frac{x_1}{x_2}} = \frac{x_1}{x_2}$.

c. De logarithme van een macht is gelijk aan de machtsexponent, vermenigvuldigd met de gelijknamige logarithme van het grondtal van de macht.

$${}^{a}\log x^p = p\, {}^{a}\log x. \quad \text{(9)}$$

Bewijs. We moeten weer laten zien, dat

$$a^{p\,{}^{a}\log x} = a^{{}^{a}\log x^p} = x^p.$$

$$a^{p\,{}^{a}\log x} = \left(a^{{}^{a}\log x}\right)^p = x^p.$$

d. De logarithme van een wortel is gelijk aan de gelijknamige logarithme van het getal onder het wortelteken, gedeeld door de wortelexponent.

$${}^{a}\log \sqrt[p]{x} = \frac{1}{p}\, {}^{a}\log x. \quad \text{(10)}$$

Bewijs. We moeten weer laten zien, dat $a^{{}^{a}\log \sqrt[p]{x}} = a^{\frac{1}{p}\,{}^{a}\log x}$.

$$a^{{}^{a}\log \sqrt[p]{x}} = \sqrt[p]{x}.$$

$$a^{\frac{1}{p}\,{}^{a}\log x} = \left(a^{{}^{a}\log x}\right)^{\frac{1}{p}} = x^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{x}.$$

e. $${}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log c. \quad \text{(11)}$$

Bewijs.

$$a^{{}^{a}\log b \times {}^{b}\log c} = \left(a^{{}^{a}\log b}\right)^{{}^{b}\log c} = b^{{}^{b}\log c} = c.$$

Ook is $a^{{}^{a}\log c} = c$, waarmee de eigenschap is bewezen. Door beide leden te delen door ${}^{a}\log b$ kunnen we deze eigenschap ook schrijven als

$${}^{b}\log c = \frac{{}^{a}\log c}{{}^{a}\log b}. \qquad \text{(12)}$$

Hieruit blijkt het verband tussen de waarden van de logarithmen van een getal voor twee verschillende grondtallen.

Door $c = a$ te stellen gaat (11) over in

$${}^{a}\log b \times {}^{b}\log a = {}^{a}\log a, \text{ dus is ook}$$

$$a^{{}^{a}\log b \times {}^{b}\log a} = a^{{}^{a}\log a} = a = a^1, \text{ dus}$$

$${}^{a}\log b \times {}^{b}\log a = 1 \qquad \text{(13)}$$

of, anders geschreven,

$${}^{a}\log b = \frac{1}{{}^{b}\log a}. \qquad \text{(14)}$$

4. Het Briggse logarithmenstelsel

Voor het uitvoeren van berekeningen gebruikt men gewoonlijk de logarithmen met het grondtal 10. Hiervoor zijn tafels opgesteld, het eerst door Henry Briggs (Engels wiskundige), aan wie het logarithmenstelsel met dit grondtal zijn naam ontleent. De tafels van Briggs zijn het eerst in 1624 uitgegeven; in 1628 zijn deze aangevuld door Adriaan Vlacq (Gouda).

Het is gebruikelijk bij het grondtal 10 dit grondtal niet bij de afkorting log te schrijven; met log a bedoelt men ${}^{10}\log a$. De logarithmen met grondtal 10 noemt men Briggse logarithmen, ook wel gewone logarithmen.

Bij het optellen en aftrekken van getallen leveren de logarithmen geen voordeel; wel bij vermenigvuldigen, delen, machtsverheffen en worteltrekken. Hierbij maken we gebruik van de onder 3 genoemde eigenschappen. Om het product $a\,b$ te bepalen, zoekt men in de tafel log a en log b op, telt de gevonden logarithmen op, waardoor men log $a\,b$ verkrijgt [zie form. (7)] en zoekt bij de zo verkregen logarithmen van $a\,b$ in de tafel het getal op, dat daarbij behoort en dus het product $a\,b$ is. Om het quotiënt $\frac{a}{b}$ te bepalen, berekent men $\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$, en zoekt in de tafel het hierbij behorende getal [zie form. (8)]. Om a^n te berekenen vermenigvuldigen we log a met n. Volgens form. (9)

is log $a^n = n \log a$, dus we zoeken weer in de tafel het getal op, dat bij $n \log a$ behoort en hebben daarmee a^n gevonden. $\sqrt[n]{a}$ berekenen we op overeenkomstige wijze volgens form. (10).

De termen van de schaal met een positieve exponent, nl. 10, 100, 1000 enz., kan men voorstellen door 10^k, waarbij k achtereenvolgens 1, 2, 3 enz. is. Log $10^k = k$. De termen van de schaal met negatieve exponent, nl. 0,1, 0,01, 0,001 enz., kan men voorstellen door 10^{-k}.

Log $10^{-k} = -k$. Log $1 = \log 10^0 = 0$. De logarithme van een term van de schaal is dus gelijk aan het aantal nullen, dat die term bevat, en wel positief als de nullen rechts en negatief als de nullen links van de 1 staan. Van de getallen, groter dan 1 en kleiner dan 10, ligt de logarithme tussen de logarithmen van 1 en 10, dus tussen 0 en 1 en is dus 0, ... Van de getallen, groter dan 10 en kleiner dan 100 is de logarithme 1, ...; van de getallen tussen 100 en 1000 is de logarithme 2, ... enz. Zo is bv. log 2 = 0,301 03. (D.w.z. tot in 5 decimalen nauwkeurig; in het algemeen zijn de logarithmen onmeetbare getallen, d.w.z. ze kunnen niet door een eindige tiendelige breuk worden voorgesteld. In de meeste gevallen geven logarithmen in 5 decimalen resultaten, die voor de practijk voldoende nauwkeurig zijn.)

Log $20 = \log 10 \times 2 = \log 10 + \log 2 = 1 + \log 2 = 1{,}301\,03$.

Log $200 = \log 100 \times 2 = \log 100 + \log 2 = 2 + \log 2 = 2{,}301\,03$.

Wanneer een getal met 10^n wordt vermenigvuldigd, wordt zijn logarithme n groter. Hieruit volgt: *heeft een getal n cijfers vóór de komma, dan bevat de logarithme n—1 gehelen.* Wanneer een getal door 10^n wordt gedeeld, wordt zijn logarithme n kleiner. Hieruit volgt: *heeft een getal n nullen vóór het eerste van nul verschillende cijfer, dan is de logarithme een getal tussen 0 en 1* (0, ...), *verminderd met n.* Bv. log 23,45 = 1,370 14; log 0,000 234 5 = 0,370 14 — 4. Voor dit laatste getal zou men ook — 3,629 86 kunnen schrijven, doch dit is niet gebruikelijk en ook niet raadzaam; de eerste schrijfwijze is veel practischer bij berekeningen, zoals we nog zullen zien.

Het aantal positieve of negatieve gehelen, dat in de logarithme voorkomt, heet de *wijzer*; het gedeelte achter de komma heet de *mantisse*. De wijzer kunnen we op de aangegeven wijze onmiddellijk uit het gegeven getal aflezen; de mantisse zoeken we op in de logarithmentafel.

5. De inrichting en het gebruik van een logarithmentafel

Op blz. 22 en 23 zijn als voorbeeld enige bladzijden uit een logarithmentafel afgedrukt[1]. In de kolom vóór de eerste verticale lijn staan de getallen vermeld, waarvan de mantissen van de logarithmen worden opgegeven. In deze tafel zijn de mantissen in 5 decimalen gegeven.

[1] Ontleend aan Versluys-Wijdenes, Groote Tafel H, 4e druk, prijs f 6,25; uitgave P. Noordhoff, Groningen.

We bekijken eerst de kolom van de tafel, waarboven 0 staat. Bij 500 behoort als mantisse 69 897; log 500 = 2,69 897; log 5 = = 0,69 897; log 0,005 = 0,69 897 — 3. Bij het geleidelijk toenemen van de getallen neemt ook de logarithme geleidelijk toe. Bij twee opvolgende getallen is het verschil in de mantissen zo klein, dat van de vijf cijfers de eerste twee gewoonlijk nog dezelfde zijn, en daarom niet telkens worden herhaald. Alleen wanneer in deze eerste twee cijfers een verandering komt, staan deze vermeld. We vinden in de tafel:

log 501 = 2,69 984; log 502 = 2,70 070; log 503 = 2,70 157 enz.

Boven de tafel vinden we de cijfers 0, 1, 2 enz. tot en met 9 boven de 10 kolommen met getallen. Deze kolommen geven de mantissen voor getallen van 4 cijfers, nl. voor de getallen in de eerste kolom, onder het woord Get., met daarachter het cijfer boven een der volgende kolommen, die de laatste drie cijfers van de mantisse geven. Dus log 500,0 = 2,69 897; log 500,1 = 2,69 906; log 500,2 = 2,69 914 enz.; log 5002 = 3,69 914; log 0,5002 = 0,69 914 — 1 enz. In de tweede regel, achter het getal 501, vinden we, beginnend bij de kolom, waarboven het cijfer 2, een sterretje. Dit betekent, dat de eerste twee cijfers van de mantisse niet meer 69 zijn, doch 70 zijn geworden.

Log 5,011 = 0,69 992; log 5,012 = 0,70 001. Op overeenkomstige wijze vinden we bv. log 53,70 = 1,72 997; log 53,71 = 1,73 006.

We beschouwen nu de laatste kolom, waarboven staat: evenredige delen. Deze kolom gebruiken we om de logarithmen te vinden van getallen met 5 cijfers (afgezien van eventuele nullen voor of achter deze cijfers). We hebben reeds gezien, dat, als de getallen geleidelijk groter worden, ook de logarithmen dezer getallen langzaam toenemen. We zien dit al daaraan, dat bij getallen van 4 cijfers de logarithmen van twee opvolgende getallen voor de getallen van 500 tot 510 in de meeste gevallen met 9 eenheden van de laatste decimaal toenemen, een enkele maal met 8. Midden op blz. 23 is deze toename gewoonlijk 8, in slechts enkele gevallen nog 9; onderaan komt enige malen een toename 7 voor. Om nu de logarithme van 5,005 7 te vinden, zoeken we eerst op log 5,005 = 0,69 940 en log 5,006 = = 0,69 949. Log 5,005 7 ligt hier op een evenredige afstand tussen. Het verschil der gevonden logarithmen is 9 eenheden van de laatste decimaal. Log 5,005 7 is dus 0,69 940 + 0,7 × 9 eenheden van de laatste decimaal. We vinden nu in de laatste kolom in de hulptabel, waarboven het cijfer 9 staat, achter de 7 het getal 6,3. Dit is 0,7 × 9. We tellen dus bij 0,69 940 het evenredige deel 6,3 op bij de laatste decimaal. Doch hiervan laten we de 3 weg, omdat de mantissen in de tafel slechts in 5 decimalen nauwkeurig zijn. Dus log 5,005 7 = = 0,69 946. Wanneer in de hulptabellen het cijfer achter de komma kleiner is dan 5, laten we het weg; is het 5 of meer, dan nemen we het aantal gehelen 1 groter. Zo wordt 6,3 afgerond op 6, doch 2,7 afgerond tot 3 en 4,5 tot 5.

Get.	Log 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
490	69 020	028	037	046	055	064	073	082	090	099
491	108	117	126	135	144	152	161	170	179	188
492	197	205	214	223	232	241	249	258	267	276
493	285	294	302	311	320	329	338	346	355	364
494	373	381	390	399	408	417	425	434	443	452
495	461	469	478	487	496	504	513	522	531	539
496	548	557	566	574	583	592	601	609	618	627
497	636	644	653	662	671	679	688	697	705	714
498	723	732	740	749	758	767	775	784	793	801
499	810	819	827	836	845	854	862	871	880	888
500	69 897	906	914	923	942	940	949	958	966	975
501	984	992	*001	*010	*018	*027	*036	*044	*053	*062
502	70 070	079	088	096	105	114	122	131	140	148
503	157	165	174	183	191	200	209	217	226	234
504	243	252	260	269	278	286	295	303	312	321
505	329	338	346	355	364	372	381	389	398	406
506	415	424	432	441	449	458	467	475	484	492
507	501	509	518	526	535	544	552	561	569	578
508	586	595	603	612	621	629	638	646	655	663
509	672	680	689	697	706	714	723	731	740	749
510	70 757	766	774	783	791	800	808	817	825	834
511	842	851	859	868	876	885	893	902	910	919
512	927	935	944	952	961	969	978	986	995	*003
513	71 012	020	029	037	046	054	063	071	079	088
514	096	105	113	122	130	139	147	155	164	172
515	181	189	198	206	214	223	231	240	248	257
516	265	273	282	290	299	307	315	324	332	341
517	349	357	366	374	383	391	399	408	416	425
518	433	441	450	458	466	475	483	492	500	508
519	517	525	533	542	550	559	567	575	584	592
520	71 600	609	617	625	634	642	650	659	667	675
Get.	Log 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Evenredige delen

	9
1	0,9
2	1,8
3	2,7
4	3,6
5	4,5
6	5,4
7	6,3
8	7,2
9	8,1

	8
1	0,8
2	1,6
3	2,4
4	3,2
5	4,0
6	4,8
7	5,6
8	6,4
9	7,2

Get.	Log 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
520	71 600	609	617	625	634	642	650	659	667	675
521	684	692	700	709	717	725	734	742	750	759
522	767	775	784	792	800	809	817	825	834	842
523	850	858	867	875	883	892	900	908	917	925
524	933	941	950	958	966	975	983	991	999	*008
525	72 016	024	032	041	049	057	066	074	082	090
526	099	107	115	123	132	140	148	156	165	173
527	181	189	198	206	214	222	230	239	247	255
528	263	272	280	288	296	304	313	321	329	337
529	346	354	362	370	378	387	395	403	411	419
530	72 428	436	444	452	460	469	477	485	493	501
531	509	518	526	534	542	550	558	567	575	583
532	591	599	607	616	624	632	640	648	656	665
533	673	681	689	697	705	713	722	730	738	746
534	754	762	770	779	787	795	803	811	819	827
535	835	843	852	860	868	876	884	892	900	908
536	916	925	933	941	949	957	965	973	981	989
537	997	*006	*014	*022	*030	*038	*046	*054	*062	*070
538	73 078	086	094	102	111	119	127	135	143	151
539	159	167	175	183	191	199	207	215	223	231
540	73 239	247	255	263	272	280	288	296	304	312
541	320	328	336	344	352	360	368	376	384	392
542	400	408	416	424	432	440	448	456	464	472
543	480	488	496	504	512	520	528	536	544	552
544	560	568	576	584	592	600	608	616	624	632
545	640	648	656	664	672	679	687	695	703	711
546	719	727	735	743	751	759	767	775	783	791
547	799	807	815	823	830	838	846	854	862	870
548	878	886	894	902	910	918	926	933	941	949
549	957	965	973	981	989	997	*005	*013	*020	*028
550	74 036	044	052	060	068	076	084	092	099	107
Get.	Log 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Evenredige delen

	9
1	0,9
2	1,8
3	2,7
4	3,6
5	4,5
6	5,4
7	6,3
8	7,2
9	8,1

	8
1	0,8
2	1,6
3	2,4
4	3,2
5	4,0
6	4,8
7	5,6
8	6,4
9	7,2

Dat in de tabelletjes der evenredige delen nog een cijfer achter de komma staat heeft zijn nut bij het bepalen van de logarithme van een getal van 6 cijfers. Daarbij wordt de juist aangegeven bewerking nog eens herhaald. Om bv. log 5,005 74 te vinden, tellen we bij de reeds gevonden log 5,005 7 = 0,69 946 nog op het tiende deel van het getal, dat in de hulptabel achter het cijfer 4 staat, nl. 0,36. We zeggen nu niet: 0,36 is kleiner dan 0,5, dus we laten dit weg, en log 5,005 74 = = 0,699 46; de berekening gaat als volgt.

log 5,005 = 0,69 940
    7   6 3
     4   36
log 5,00 574 = 0,69 946 66 of, afgerond, 0,69 947.

Op deze wijze wordt de grootste nauwkeurigheid verkregen.

We kunnen nu ook omgekeerd bij iedere gegeven logarithme het bijbehorende getal vinden. We lichten dit toe aan een paar voorbeelden.

Is gegeven: log x = 3,71 731 en wensen we x te bepalen, dan zoeken we in de tafel de mantissen, waarvan de eerste twee cijfers 71 zijn. We vinden hierbij de getallen van 512 tot 524. De volgende drie cijfers, 731, liggen tussen de mantissen, behorende bij 5215 en 5216 (op de plaats van de komma letten we nu nog niet), nl. 725 en 734. Het verschil hiervan is 9. We moeten bij 5215 nu nog zoveel eenheden van de volgende decimaal optellen, dat de mantisse 725 aangroeit tot 731, dus met 6. In de tabel der evenredige delen zien we, dat een 6 als vijfde cijfer 5,4 eenheden toevoegt. Voegen we nog een zes als zesde cijfer toe, dan wordt daardoor de mantisse nog eens met 0,54 verhoogd, dus wordt 71 725 + 5,4 + 0,54 = = 71 730,94; voegen we echter als zesde cijfer een 7 toe, dan wordt de mantisse 71 725 + 5,4 + 0,63 = 71 731,03. Deze laatste ligt het dichtst bij de gegeven mantisse 71 731. We stellen dus x = 521 567, doch moeten hierin nog de komma plaatsen. Het aantal van de gehelen van de gegeven logarithme is 3; het aantal cijfers links van de komma moet dus 3 + 1 = 4 zijn, dus x = 5215,67. Het bepalen van het zesde cijfer laat men gewoonlijk achterwege, omdat de gegeven logarithme gewoonlijk de uitkomst is van een bewerking, waarbij het laatste cijfer van de logarithme niet met zekerheid bekend is.

Als tweede voorbeeld zoeken we het getal, waarvan de logarithme 0,73 461 — 2 is. We zoeken eerst de mantissen, waarvan de eerste twee cijfers 73 zijn. We vinden deze in het onderste gedeelte van onze tabel. Op overeenkomstige wijze als in het vorige geval vinden we, dat bij het getal 5427 de mantisse 73 456 behoort. Het verschil met de volgende mantisse is 8. In de tabel der evenredige delen voor 8 vinden we, dat een 6 als vijfde cijfer de mantisse met 4,8 verhoogt, terwijl de verhoging 5 zou moeten zijn. Een 7 als vijfde cijfer geeft een verhoging met 5,6, dus we nemen, als nauwkeurigste cijfer, een 6 en vinden dus 54 276. Het aantal gehelen van de gegeven logarithme

is — 2; er moeten dus 2 nullen links staan, zodat het gezochte getal 0,054 276 is.

6. De logarithmen der goniometrische verhoudingen

Van hoeken in het eerste kwadrant zijn alle goniometrische verhoudingen positief; van hoeken in andere kwadranten zijn er steeds enige negatief. Van de goniometrische verhoudingen van deze laatste hoeken bestaat dus de logarithme niet. We kunnen echter de goniometrische verhoudingen van willekeurige hoeken steeds herleiden tot die van hoeken in het eerste kwadrant (zie hfdst. I). Daarom worden in een goniometrische logarithmentafel alleen de logarithmen vermeld van de goniometrische verhoudingen van hoeken in het 1e kwadrant. Een verdere beperking is, dat alleen van sin, cos, tg en cotg de logarithme wordt vermeld; niet van sec en cosec. Deze kan men vinden als volgt.

$$\log \sec x = \log \frac{1}{\cos x} = -\log \cos x;$$

$$\log \operatorname{cosec} x = \log \frac{1}{\sin x} = -\log \sin x.$$

Op dezelfde wijze kan men log cotg x vinden uit log tg x:

$$\log \operatorname{cotg} x = \log \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\log \operatorname{tg} x.$$

Doch log cotg x staat ook in de tafels vermeld; weglating daarvan zou de tafel niet beknopter maken, zoals we zullen zien.

Op blz. 26 en 27 zijn als voorbeeld enige bladzijden uit een logarithmentafel in 5 decimalen weergegeven [1]. Tussen 0° en 45° zijn sin x, cos x en tg x kleiner dan 1, tussen 45° en 90° zijn sin x, cos x en cotg x kleiner dan 1, en hun logarithmen dus negatief. Om in de tafel negatieve getallen te vermijden en daardoor de bewerkingen eenvoudiger te maken, zijn de in de tafel als logarithmen aangegeven getallen niet de logarithmen zelf, doch getallen, die 10 groter zijn. Wanneer men dus afleest: log sin 30° = 9,69 897 betekent dit: log sin 30° = 9,69 897 — 10 = — 0,30 103. Het practische nut van deze wat vreemd lijkende gewoonte zal uit de nog te bespreken voorbeelden blijken.

De omvang van een goniometrische logarithmentafel wordt tot de helft teruggebracht door alleen de gegevens voor hoeken van 0 tot 45° op te nemen. Hieruit kunnen de logarithmen voor hoeken van 45° tot 90° worden afgeleid, want

$$\begin{aligned} \sin(45^\circ + x) &= \cos(45^\circ - x); \\ \operatorname{cotg}(45^\circ + x) &= \operatorname{tg}(45^\circ - x); \\ \operatorname{tg}(45^\circ + x) &= \operatorname{cotg}(45^\circ - x); \\ \cos(45^\circ + x) &= \sin(45^\circ - x). \end{aligned}$$

[1] Zie de noot op blz. 20.

40°

M	log sin	V. 1″	log tg	G.V. 1″	log cot	log cos	V. 1″	
0	9,80 822		9,92 381		10,07 619	9,88 425		**60**
1	9,80 822	0,25	9,92 407	0,43	10,07 593	9,88 415	0,17	59
2	9,80 837	0,25	9,92 433	0,43	10,07 567	9,88 404	0,18	58
3	9,80 852	0,25	9,92 458	0,42	10,07 542	9,88 394	0,17	57
4	9,80 867	0,25	9,92 484	0,43	10,07 516	9,88 383	0,18	56
5	9,80 882	0,25	9,92 510	0,43	10,07 490	9,88 372	0,18	55
6	9,80 897	0,25	0,92 535	0,42	10,07 465	9,88 362	0,17	54
7	9,80 912	0,25	9,92 561	0,43	10,07 439	9,88 351	0,18	53
8	9,80 927	0,25	9,92 587	0,43	10,07 413	9,88 340	0,18	52
9	9,80 942	0,25	9,92 612	0,42	10,07 388	9,88 330	0,17	51
10	9,80 957	0,25	9,92 638	0,43	10,07 362	9,88 319	0,18	**50**
11	9,80 972	0,25	9,92 663	0,42	10,07 337	9,88 308	0,18	49
12	9,80 987	0,25	9,92 689	0,43	10,07 311	9,88 298	0,17	48
13	9,81 002	0,25	9,92 715	0,43	10,07 285	9,88 287	0,18	47
14	9,81 017	0,25	9,92 740	0,42	10,07 260	9,88 276	0,18	46
15	9,81 032	0,25	9,92 766	0,43	10,07 234	9,88 266	0,17	45
16	9,81 047	0,25	9,92 792	0,43	10,07 208	9,88 255	0,18	44
17	9,81 061	0,23	9,92 817	0,42	10,07 183	9,88 244	0,18	43
18	9,81 076	0,25	9,92 843	0,43	10,07 157	9,88 234	0,17	42
19	9,81 091	0,25	9,92 868	0,42	10,07 132	9,88 223	0,18	41
20	9,81 106	0,25	9,92 894	0,43	10,07 106	9,88 212	0,18	**40**
21	9,81 121	0,25	0,92 920	0,43	10,07 080	9,88 201	0,18	39
22	9,81 136	0,25	9,92 945	0,42	10,07 055	9,88 191	0,17	38
23	9,81 151	0,25	9,92 971	0,43	10,07 029	9,88 180	0,18	37
24	9,81 166	0,25	9,92 996	0,42	10,07 004	9,88 169	0,18	36
25	9,81 180	0,23	9,93 022	0,43	10,06 978	9,88 158	0,18	35
26	9,81 195	0,25	9,93 048	0,43	10,06 952	9,88 148	0,17	34
27	9,81 210	0,25	9,93 073	0,42	10,06 927	9,88 137	0,18	33
28	9,81 225	0,25	9,93 099	0,43	10,06 901	9,88 126	0,18	32
29	9,81 240	0,25	9,93 124	0,42	10,06 876	9,88 115	0,18	31
30	9,81 254	0,23	9,93 150	0,43	10,06 850	9,88 105	0,17	**30**
	log cos	V. 1″	log cot	G.V. 1″	log tg	log sin	V. 1″	M

49°

40⁰

M	log sin	V. 1″	log tg	G.V. 1″	log cot	log cos	V. 1″	
30	9,81 254		9,93 150		10,06 850	9,88 105		30
31	9,81 269	0,25	9,93 175	0,42	10,06 825	9,88 094	0,18	29
32	9,81 284	0,25	9,93 201	0,43	10,06 799	9,88 083	0,18	28
33	9,81 299	0,25	9,93 227	0,43	10,06 773	9,88 072	0,18	27
34	9,81 314	0,25	9,93 252	0,42	10,06 748	9,88 061	0,18	26
35	9,81 328	0,23	9,93 278	0,43	10,06 722	9,88 051	0,17	25
36	9,81 343	0,25	9,93 303	0,42	10,06 697	9,88 040	0,18	24
37	9,81 358	0,25	9,93 329	0,43	10,06 671	9,88 029	0,18	23
38	9,81 372	0,23	9,93 354	0,42	10,06 646	9,88 018	0,18	22
39	9,81 387	0,25	9,93 380	0,43	10,06 620	9,88 007	0,18	21
40	9,81 402	0,25	9,93 406	0,43	10,06 594	9,87 996	0,18	20
41	9,81 417	0,25	0,93 431	0,42	10,06 569	9,87 985	0,18	19
42	9,81 431	0,23	9,93 457	0,43	10,06 543	9,87 975	0,17	18
43	9,81 446	0,25	9,93 482	0,42	10,06 518	9,87 964	0,18	17
44	9,81 461	0,25	0,93 508	0,43	10,06 492	9,87 953	0,18	16
45	9,81 475	0,23	9,93 533	0,42	10,06 467	9,87 942	0,18	15
46	9,81 490	0,25	9,93 559	0,43	10,06 441	9,87 931	0,18	14
47	9,81 505	0,25	9,93 584	0,42	10,06 416	9,87 920	0,18	13
48	9,81 519	0,23	9,93 610	0,43	10,06 390	9,87 909	0,18	12
49	9,81 534	0,25	9,93 636	0,43	10,06 364	9,87 898	0,18	11
50	9,81 549	0,25	9,93 661	0,42	10,06 339	9,87 887	0,18	10
51	9,81 563	0,23	9,93 687	0,43	10,06 313	9,87 877	0,17	9
52	9,81 578	0,25	9,93 712	0,42	10,06 288	9,87 866	0,18	8
53	9,81 592	0,23	9,93 738	0,43	10,06 262	9,87 855	0,18	7
54	9,81 607	0,25	9,93 763	0,42	10,06 237	9,87 844	0,18	6
55	9,81 622	0,25	9,93 789	0,43	10,06 211	9,87 833	0,18	5
56	9,81 636	0,23	9,93 814	0,42	10,06 186	9,87 822	0,18	4
57	9,81 651	0,25	9,93 840	0,43	10,06 160	9,87 811	0,18	3
58	9,81 665	0,23	9,93 865	0,42	10,06 135	9,87 800	0,18	2
59	9,81 680	0,25	0,93 891	0,43	10,06 109	9,87 789	0,18	1
60	9,81 694	0,23	9,93 916	0,42	10,06 084	9,87 778	0,18	0
	log cos	V. 1″	log cot	G.V. 1″	log tg	log sin	V. 1″	M

49⁰

Enkele aanwijzingen in de tafel vergemakkelijken dit, waardoor het optellen bij of aftrekken van 45° overbodig wordt.

We beschouwen nu de bladzijden uit een logarithmentafel, op blz. 26 en 27 weergegeven, voor hoeken tussen 40° en 41° en voor hoeken tussen 49° en 50°, met een minuut opklimmend. Boven de bladzijden staat 40°. Daaronder staat de letter M, die minuten betekent. In de kolom daaronder staat het aantal minuten. We zien verder achtereenvolgens de kolommen voor log sin, log tg, log cotg en log cos. Zo is bv. $\log\sin 40^\circ 5' = 9{,}80\,882 - 10$. Onder aan de bladzijden staat 49°. Hierbij behoren de aanwijzingen log cos enz. onder de kolommen en de kolom der minuten rechts. We lezen bv. af: $\log \text{tg}\, 49^\circ 46' = 10{,}07\,260 - 10$.

Verder zien we nog kolommen, waarboven staat: V.1″. Dit betekent het verschil der logarithmen voor 1 secunde. Zo is $\log\sin 40^\circ 5' = 9{,}80\,882$ en $\log\sin 45^\circ 6' = 9{,}80\,897$ (afgezien van -10). Voor deze 60″ neemt de logarithme toe met 15 eenheden van de laatste decimaal, dus voor 1″ met $\frac{15}{60} = 0{,}25$. We berekenen $\log\sin 40^\circ 5' 13'' = 9{,}80\,882 + 13 \times 0{,}25 =$ afgerond $9{,}80\,885$. Om het rekenen te vergemakkelijken zijn de verschillen in de kolommen V.1″ vermeld. Tussen de kolommen log tg en log cotg staat één enkele kolom G.V.1″. Dit betekent: gemeenschappelijke verschillen per secunde, nl. voor log tg en log cotg; log tg neemt telkens evenveel toe als log cotg afneemt. Dit blijkt, door cotg x te schrijven als $\frac{1}{\text{tg}\, x}$; $\log \text{cotg}\, x = \log \frac{1}{\text{tg}\, x} = -\log \text{tg}\, x$, dus $\log \text{tg}\, x + \log \text{cotg}\, x = 0$.

Als voorbeeld berekenen we nog log cotg $49^\circ 45' 27''$.

$$\begin{aligned} \log \text{cotg}\, 49^\circ 45' &= 9{,}92\,766 \\ 27 \times 0{,}43 &= \phantom{9{,}9}11{,}61 \\ \hline \log \text{cotg}\, 49^\circ 45' 27'' &= 9{,}92\,754 \quad \text{(afgerond tot 5 decimalen).} \end{aligned}$$

Hier moeten we de bijdrage van het aantal secunden aftrekken in plaats van optellen, daar bij een grotere hoek de cotangens en dus ook log cotg afneemt.

III. GRAFISCHE VOORSTELLINGEN

1. Het rechthoekig assenkruis

Wanneer een grootheid y afhankelijk is van een grootheid x, noemen we y een *functie* van x. Dit geven we aan door de formule

$$y = f(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

In de goniometrie (zie hfdst. I) is bv. $\sin x$ afhankelijk van x. Dan schrijven we (1) als volgt: $y = \sin x$. Als y een functie is van x kan een zg. grafische voorstelling een nuttig hulpmiddel zijn om ons hiervan een duidelijk beeld te vormen. De meest gebruikelijke methode bestaat hierin, dat we een rechthoekig assenkruis tekenen (fig. 1). De horizontale as noemen we de x-as, de verticale as de y-as. Het snijpunt der assen heet de oorsprong. Hierbij plaatsen we het cijfer 0, dat voor beide assen geldt, of de letter O. Het gedeelte van de x-as rechts van de oorsprong is het positieve gedeelte, dat links van de oorsprong het negatieve gedeelte. Ook spreekt men wel van de positieve x-as en de negatieve x-as. Op de verticale as rekenen we het gedeelte boven de oorsprong positief, het gedeelte beneden de oorsprong negatief. Op ieder der assen brengen we een schaalverdeling aan, zoals in fig. 1 is aangegeven. Ieder punt in het vlak kan nu worden aangeduid door twee getallen. Het punt P in fig. 1 is bepaald door 2 positieve eenheden op de x-as en 3 positieve eenheden op de y-as. Dit wordt aangeduid door P (2, 3). Op overeenkomstige wijze schrijven we Q (— 3, 1).

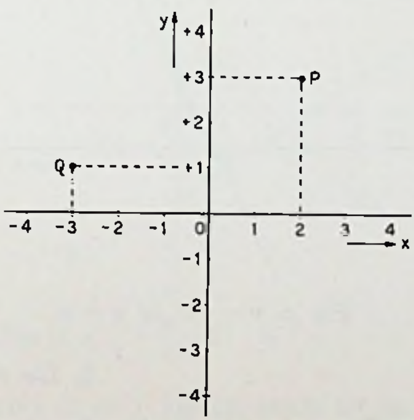


Fig. 1. Rechthoekig assenkruis met P (2,3) en Q (— 3,1).

Wanneer bij iedere waarde van x een bepaalde waarde van y behoort, zoals bv. bij $y = \sin x$ het geval is, kan deze functie worden voorgesteld door een kromme. In hfdst. I, fig. 8 zijn al de zes goniometrische verhoudingen op deze wijze voorgesteld. Bij de cyclometrische functies, zie hfdst. I, fig. 13, behoren bij sommige waarden

van x geen waarden van y; bij andere waarden van x behoren een aantal waarden van y, in dit geval zelfs oneindig vele. Wanneer bij één waarde van x meer dan één waarde van y behoort, noemen we de functie *meerwaardig*. In hfdst. II hebben we ook met enkele functies kennis gemaakt, nl. $y = a^x$ (fig. 1) en $y = \log x$ (fig. 2).

Bij de bepaling van het punt P in fig. 1 hebben we door dit punt een lijn getrokken loodrecht op de x-as en een loodrecht op de y-as. Het stuk, dat op de x-as op deze wijze wordt afgesneden, noemen we de *abscis*; het stuk, dat op de y-as wordt afgesneden, noemen we de *ordinaat*; beide samen zijn de *coördinaten* van het punt. P heeft dus als coördinaten (2, 3) waarvan 2 de abscis en 3 de ordinaat is.

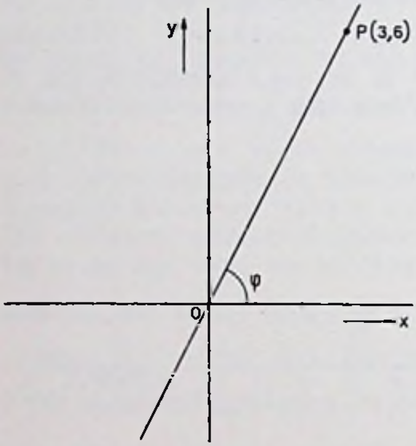


Fig. 2. $y = 2x$; tg $\varphi = 2$.

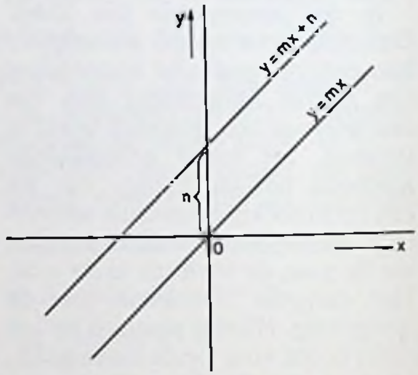


Fig. 3. $y = mx$ en $y = mx + n$.

2. De rechte lijn

Een rechte lijn, die door de oorsprong gaat, kunnen we voorstellen door

$$y = mx \quad \text{(2)}$$

(fig. 2), waarbij m een constante is, die de richting van de lijn bepaalt en daarom *richtingscoëfficiënt* wordt genoemd. Van ieder punt op deze lijn gelegen voldoen de coördinaten aan de vergelijking (2). Is bv. $m = 2$, dus de vergelijking van de lijn $y = 2x$, dan ligt het punt P (3, 6) op deze lijn, want door $x = 3$ en $y = 6$ te stellen, wordt aan deze vergelijking voldaan. Uit $y = 2x$ volgt: $\frac{y}{x} = 2$. De constante m in verg. (2) kunnen we dus bepalen, als we de coördinaten x en y van één punt op deze lijn kennen; $m = \frac{y}{x} = \text{tg}\,\varphi$.

Verschuiven we de lijn $y = mx$ over een afstand n omhoog, dan

wordt, voor eenzelfde waarde van x, y een bedrag n groter (fig. 3). De vergelijking van de lijn wordt dan:

$$y = m x + n \qquad (3)$$

Hieruit volgt: als $x = 0$ is $y = n$. De lijn snijdt dus een stuk n van de y-as af. Iedere rechte lijn kan door de verg. (3) worden voorgesteld. Om voor een gegeven lijn de vergelijking in de vorm (3) op te stellen, bepalen we de tangens van de hoek, die de lijn met de positieve x-as maakt, en hebben daarna m gevonden. We bepalen het snijpunt met de y-as en hebben dan n bepaald.

Wanneer we in verg. (3) alle termen met eenzelfde getal vermenigvuldigen, blijft de vergelijking dezelfde lijn voorstellen; $y = m x + n$ en $3 y = 3 m x + 3 n$ geven hetzelfde verband tussen x en y.

We kunnen voor verg. (3) ook schrijven: $m x - y + n = 0$, of, algemener,

$$A x + B y + C = 0 \qquad (4)$$

In deze vergelijking komen drie constanten, A, B en C, voor, terwijl in de vergelijking (3) er slechts twee voorkomen. Doch in de vorm (4) gaat het slechts om de verhouding der constanten, zodat er toch eigenlijk slechts twee zijn, bv. $\frac{B}{A}$ en $\frac{C}{A}$. Voor iedere positieve of negatieve waarde van A, B en C stelt (4) een rechte lijn voor. Daar (4) de meest algemene vorm is van een uitdrukking van de 1e graad (x en y komen beide tot de eerste macht voor, en er is verder een constante term aanwezig), stelt iedere vergelijking van de 1e graad een rechte lijn voor. Daarom noemen we deze vergelijking een *lineaire* vergelijking.

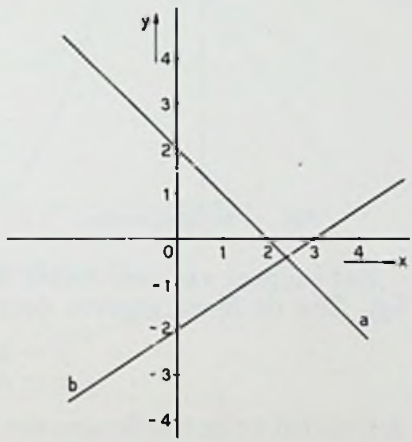


Fig. 4. a. $\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1$; b. $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$.

Een andere vorm voor de vergelijking van een rechte lijn is

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1. \qquad (5)$$

Stelt men hierin $x = 0$, dan vindt men $y = y_0$. Het stuk, dat de lijn van de y-as afsnijdt, is dus y_0. Stelt men $y = 0$, dan vindt men $x = x_0$. Het stuk, dat de lijn van de x-as afsnijdt, is dus x_0 (fig. 4).

Een rechte lijn door een gegeven punt P (x_1, y_1) heeft een vergelijking als verg. (3): $y = m x + n$. Deze gaat door het punt P (x_1, y_1) als $y_1 = m x_1 + n$. Aftrekking geeft

$$y - y_1 = m (x - x_1) \qquad (6)$$

In deze vergelijking komen x en y tot de 1e macht voor; het is dus de vergelijking van een rechte lijn. Verder voldoen de coördinaten van het punt P (x_1, y_1) aan verg. (6). Het is dus de algemene vergelijking van alle rechte lijnen door het punt P (x_1, y_1). Laat men de richtingscoëfficiënt m alle waarden doorlopen van $-\infty$ tot $+\infty$, dan draait deze lijn om het punt P en vormt een *stralenbundel* of *waaier* (fig. 5).

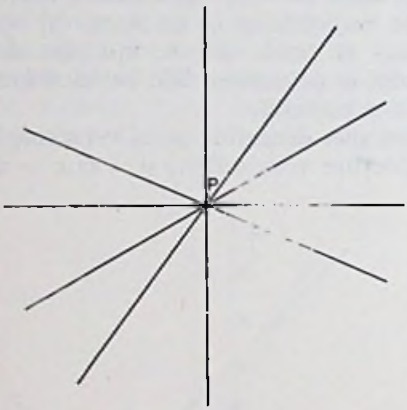


Fig. 5. Stralenbundel.

Om hieruit de lijn te vinden, die door een tweede punt Q (x_2, y_2) gaat, substitueren we de coördinaten van dit punt in verg. (6):

$$y_2 - y_1 = m\,(x_2 - x_1) \quad \text{.. (7)}$$

Als hieraan wordt voldaan, ligt het punt Q op de lijn. Door deling volgt nu uit (6) en (7) de vergelijking van de lijn door de twee gegeven punten P (x_1, y_1) en Q (x_2, y_2):

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{.. (8)}$$

Het snijpunt van twee rechte lijnen is het punt, dat op beide lijnen ligt. Zijn de lijnen gegeven door de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} y &= m_1 x + n_1; \\ y &= m_2 x + n_2; \end{aligned}\right\} \quad \text{.................. (9)}$$

dan vinden we de coördinaten van het snijpunt door x en y zo te bepalen, dat aan beide vergelijkingen wordt voldaan, dus door x en y uit de verg. (9) op te lossen. Uit deze vergelijkingen volgt

$$m_1 x + n_1 = m_2 x + n_2,$$

dus

$$x = \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2}.$$

Door deze waarde van x bv. in de eerste der gegeven vergelijkingen te substitueren vinden we

$$y = m_1 \frac{n_2 - n_1}{m_1 - m_2} + n_1 = \frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{m_1 - m_2}.$$

3. De parabool

De vergelijking

$$y = a x^2 \quad \text{...................... (10)}$$

stelt een parabool voor (fig. 6). Als a een positief getal is (in fig. 6

is $a = 1$), is y positief voor iedere positieve of negatieve waarde van x. De kromme ligt dus geheel boven de x-as. De coördinaten van de oorsprong (0, 0) voldoen aan de vergelijking. De kromme gaat dus door de oorsprong. De x-as is een raaklijn aan de kromme.

Voor $x = x_1$ verkrijgt y dezelfde waarde als voor $x = -x_1$; hieruit volgt, dat de kromme symmetrisch is ten opzichte van de y-as. De

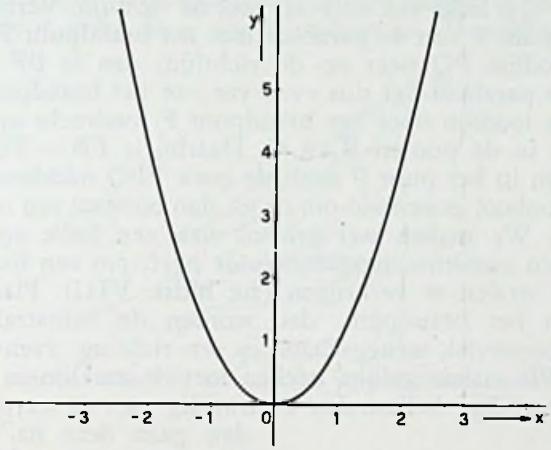


Fig. 6. De parabool $y = x^2$.

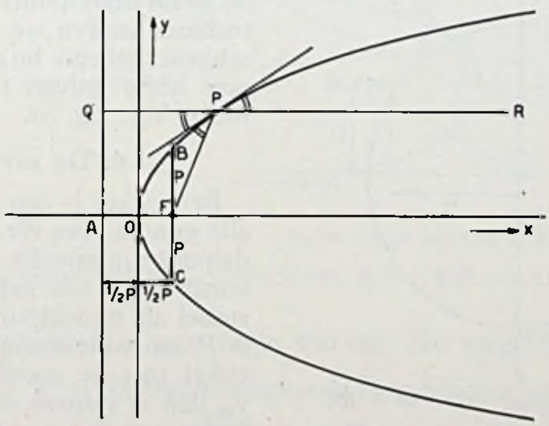


Fig. 7. De parabool $y^2 = 2px$. F. brandpunt; AQ. richtlijn.

oorsprong is de top van de parabool; de x-as is de topraaklijn.

Door de x-as en de y-as te verwisselen wordt de parabool volgens fig. 7 verkregen. De vergelijking hiervan schrijft men gewoonlijk als

$$y^2 = 2px \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

waarbij de constante p de *parameter* van de parabool wordt genoemd.

De parabool bezit enkele belangrijke eigenschappen, die we hier vermelden. Voor de afleidingen dezer eigenschappen verwijzen we naar een leerboek der analytische meetkunde, bv. Dr J. G. Rutgers, Beknopte Analytische Meetkunde.

In fig. 7 is op de as van de parabool het *brandpunt* F aangegeven. Dit ligt op een afstand $^1/_2\, p$ van de top O verwijderd. De lijn AQ op een afstand $^1/_2\, p$ links van de y-as, heet de *richtlijn*. Verbindt men een willekeurig punt P van de parabool met het brandpunt F en laat men uit P de loodlijn PQ neer op de richtlijn, dan is PF = PQ. Ieder punt van de parabool ligt dus even ver van het brandpunt als van de richtlijn. De loodlijn door het brandpunt F loodrecht op de as snijdt de parabool in de punten B en C. Daarbij is FB = FC = p.

De raaklijn in het punt P deelt de hoek FPQ middendoor. Denken we nu de parabool gewenteld om de as, dan ontstaat een omwentelingsparaboloïde. We maken wel gebruik van een holle spiegel, die de vorm van een omwentelingsparaboloïde heeft om een lichtbundel van evenwijdige stralen te verkrijgen (zie hfdst. VIII). Plaatsen we een lichtbron in het brandpunt, dan worden de lichtstralen door het spiegelend oppervlak teruggekaatst in een richting, evenwijdig aan de as (FP en PR maken gelijke hoeken met de raaklijn in P). Valt een bundel evenwijdige lichtstralen evenwijdig met de as op de spiegel, dan gaan deze na terugkaatsing alle door het brandpunt (vandaar de naam brandpunt). In de radiotechniek maken we van dit verschijnsel gebruik bij antennes voor zeer korte golven (zie Deel 4b, hfdst. V.1, fig. 7).

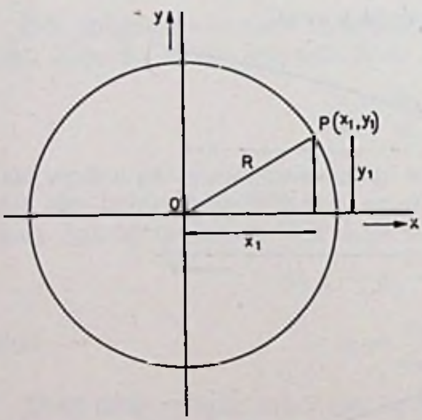


Fig. 8. Cirkel: $x^2 + y^2 = R^2$.

4. De cirkel

Een cirkel is een lijn, waarvan alle punten even ver van het middelpunt zijn gelegen. Nemen we de oorsprong O van het coördinatenstelsel als middelpunt (fig. 8), en is P een willekeurig punt van de cirkel met de coördinaten x_1 en y_1, dan is volgens de stelling van Pythagoras $x_1^2 + y_1^2 = R^2$. Daar dit voor ieder punt van de cirkel geldt, is de vergelijking van een cirkel met het middelpunt in de oorsprong en een straal R:

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (12)$$

Voor $|x| < R$ stelt de cirkel een tweewaardige functie voor; bij iedere x behoren twee waarden van y, een positieve en een negatieve, evenals dit bij de parabool volgens fig. 7 het geval is voor $x > 0$. Voor andere waarden van x zijn er geen waarden van y.

5. De ellips

Projecteren we een cirkel op een vlak, dat niet evenwijdig is aan het vlak van de cirkel, dan ontstaat een ellips (fig. 9). Denken we ons in de cirkel een x-as evenwijdig aan het vlak, waarop we projecteren, en een y-as, loodrecht daarop, dan zijn de projecties dezer assen de assen van de ellips. Van een punt van de cirkel verandert bij dit projecteren de x niet; de y wordt verkort in de verhouding $\cos \alpha$,

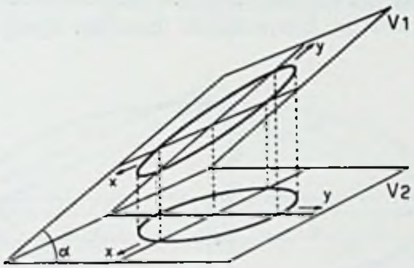


Fig. 9.
Door projectie van een cirkel in het vlak V_1 op het vlak V_2 ontstaat een ellips.

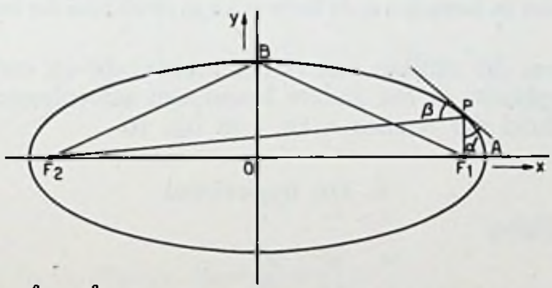


Fig. 10. Ellips: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. OA $= a =$ halve lange as; OB $= b =$ halve korte as; F_1 en F_2. brandpunten; O. middelpunt; $F_1P + F_2P = 2a$; $\angle\alpha = \angle\beta$.

waarbij α de hoek is tussen beide vlakken. De vergelijking van de cirkel was $x^2 + y^2 = R^2$; van de ellips is de vergelijking $x^2 + \frac{y^2}{\cos^2\alpha} = R^2$ of, in andere vorm, $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2 \cos^2 \alpha} = 1$. Noemen we de halve *lange as* van de ellips a en de halve *korte as* b (fig. 10), dan wordt de vergelijking van de ellips

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Op de lange as liggen twee punten F_1 en F_2 zodanig, dat voor ieder punt van de ellips $F_1P + F_2P = 2a$. De lijnen F_1P en F_2P noemen we de *voerstralen* van het punt P. De som der voerstralen is dus voor

alle punten van de ellips constant. In het bijzonder geldt dit ook voor de punten A en B, dus is ook $F_1A + F_2A = 2a = F_1B + F_2B$. Daar $F_1B = F_2B$, is $F_1B = a$. Volgens de stelling van Pythagoras is $OF_1^2 = BF_1^2 - OB^2$; we noemen $OF_1 = c$ (fig. 11), dus

$$c^2 = a^2 - b^2. \qquad (14)$$

Trekken we in het punt P de raaklijn, dan maken de voerstralen gelijke hoeken met de raaklijn, dus in fig. 10 is $\angle \alpha = \angle \beta$.

Wentelen we de ellips om de lange as, dan ontstaat een *omwentelings-ellipsoïde*. Denken we de binnenzijde hiervan spiegelend, dan zullen

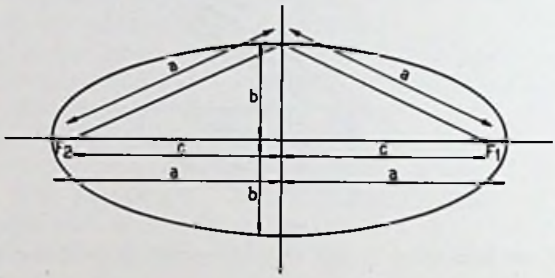


Fig. 11. Ellips met de lange as $2a$, de korte as $2b$ en de afstand der brandpunten $2c$.

de lichtstralen, die uitgaan van een lichtbron, die in een der brandpunten is geplaatst, in het andere brandpunt samenkomen. Dit volgt uit de gelijkheid der hoeken α en β in fig. 10.

6. De hyperbool

De vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (15)$$

stelt een hyperbool voor (fig. 12). We zien uit de figuur, dat een hyperbool uit twee *takken* bestaat; een tak voor positieve en een tak voor negatieve waarden van x. Daar in de vergelijking (15) alleen even machten van x en y voorkomen, zijn de beide coördinatenassen symmetrie-assen; vervangen we x door $-x$, dan blijft de vergelijking onveranderd; evenzo, als we y vervangen door $-y$. De hyperbool heeft twee *asymptoten*, AA′ en BB′. Laten we $|x|$ en daarmee tevens $|y|$ toenemen, dan nadert de kromme steeds meer tot de asymptoot; we kunnen de afstand tussen de kromme en de asymptoot zo klein maken als we willen, door $|x|$ (en daarmee ook $|y|$) groot genoeg te nemen.

De punten, waar de hyperbool van fig. 12 de x-as snijdt, noemen we de *toppen* van de hyperbool. De plaats van deze punten vinden we door $y = 0$ te stellen. Dan gaat (15) over in $\frac{x^2}{a^2} = 1$, dus $x = \pm a$.

Dus OC = OD = a. We noemen CD de *reële as* van de hyperbool, waarvan de lengte 2 a is.

De verg. (15) kunnen we ook schrijven als $\frac{x^2}{y^2} - \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2}{y^2}$. Laten we x en y toenemen, dan wordt $\frac{a^2}{y^2}$ steeds kleiner en nadert tot nul, zodat $\frac{x}{y}$ nadert tot $\pm \frac{a}{b}$. Voor de asymptoot A'A is dus $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$; voor de asymptoot B'B is $\frac{x}{y} = -\frac{a}{b}$. De vergelijkingen der asymptoten zijn dus

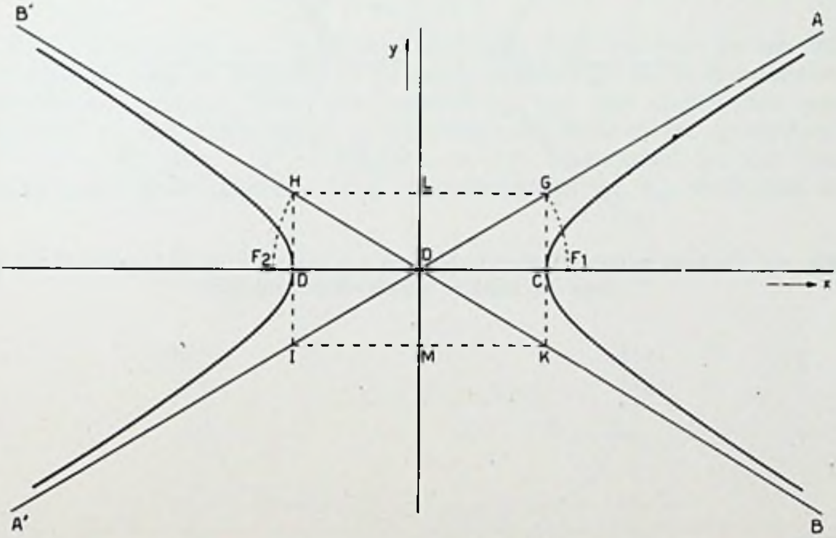


Fig. 12. Hyperbool: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$y = \frac{b}{a} x \text{ (A'A) en } y = -\frac{b}{a} x \text{ (B'B)}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

We trekken nu verticale lijnen door de toppen C en D. De vergelijkingen dezer lijnen zijn

$$x = a \quad \text{en} \quad x = -a.$$

Snijden we deze lijnen met de asymptoten (16), dan vinden we $y = \pm b$. De coördinaten dezer snijpunten zijn dus G (a, b), H ($-a$, b), I ($-a$, $-b$), K (a, $-b$). We noemen nu LM de *imaginaire as* van de hyperbool, waarvan de lengte 2 b is. Cirkelen we OG en OH om tot de x-as, dan komen we in de *brandpunten* F_1 en F_2. De afstand OG noemen we c. Volgens de stelling van Pythagoras is $c^2 = a^2 + b^2$, dus de afstand der beide brandpunten is $2c = 2\sqrt{a^2 + b^2}$.

De verbindingslijnen van een punt P van de hyperbool met de brandpunten noemen we de *voerstralen* van dat punt (fig. 13). De raaklijn in P deelt de hoek tussen de voerstralen middendoor. Laten we de hyperbool wentelen om de x-as, dan ontstaat een *omwentelings-hyperboloïde.* Denken we het binnenvlak spiegelend, dan zullen de lichtstralen, afkomstig van een in een brandpunt geplaatste lichtbron,

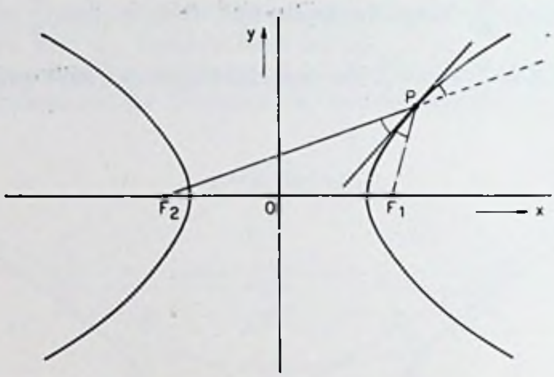


Fig. 13. De hoek tussen de voerstralen van een punt P van de hyperbool wordt door de raaklijn middendoor gedeeld.

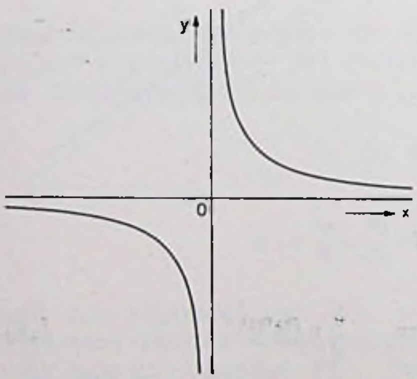


Fig. 14.
Gelijkzijdige hyperbool: $xy = a^2$.

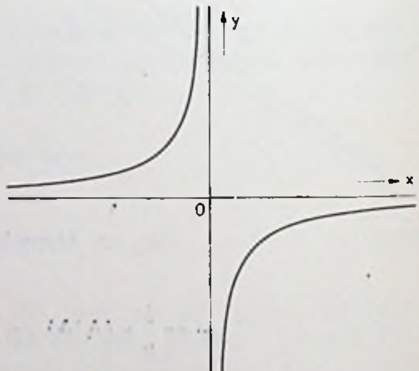


Fig. 15.
Gelijkzijdige hyperbool: $xy = -a^2$.

teruggekaatst worden in zodanige richtingen, dat ze alle afkomstig schijnen van het andere brandpunt.

Bij een hyperbool, waar $a = b$, staan de asymptoten loodrecht op elkaar. Een dergelijke hyperbool heet een *gelijkzijdige hyperbool,* waarvan de vergelijking is $x^2 - y^2 = a^2$. Nemen we bij een gelijkzijdige hyperbool de asymptoten als coördinatenassen (fig. 14), dan is de vergelijking

$$xy = a^2.$$

Nemen we de positieve richtingen der assen zoals in fig. 15, dan is de vergelijking $x\,y = -a^2$.

7. Verplaatsen van het assenkruis

Bij een evenwijdige verschuiving van het assenkruis, zodat de oorsprong van het nieuwe assenkruis de coördinaten (x_0, y_0) heeft in het oude assenstelsel (fig. 16), zijn de coördinaten van een punt P in het oude assenstelsel x en y, en in het nieuwe x' en y'. Uit fig. 16 zien we, dat

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Met behulp van de *transformatieformules* (17) kunnen we uit de vergelijking van een kromme in het oude assenstelsel die in het nieuwe assenstelsel vinden. Voor de vergelijking van een cirkel met een straal R en het middelpunt in de oorsprong hebben we gevonden: $x^2 + y^2 = R^2$ (fig. 17). Verplaatsen we het assenstelsel zo, dat het middelpunt in het nieuwe stelsel de coördinaten (x_1, y_1) heeft, dan is

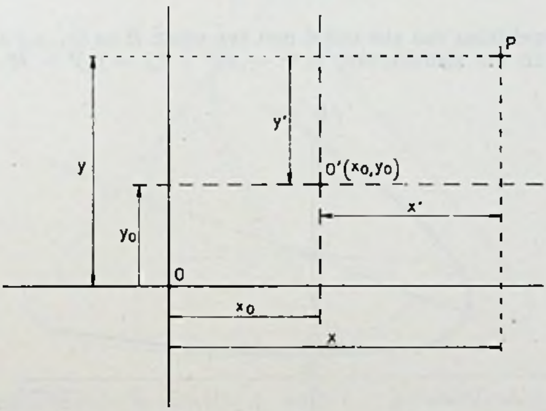


Fig. 16. Evenwijdige verplaatsing van het assenstelsel.

in de transformatieformules (17) $x_0 = -x_1$ en $y_0 = -y_1$, zodat de vergelijking van de cirkel wordt:

$$(x' - x_1)^2 + (y' - y_1)^2 = R^2.$$

Laten we hierin de accenten weg, dan hebben we de vergelijking van een cirkel, waarvan het middelpunt de coördinaten (x_1, y_1) heeft en de straal R is,

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Deze meest algemene vergelijking van een cirkel kunnen we ook schrijven als

$$x^2 + y^2 + a\,x + b\,y + c = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

De waarden van a, b en c volgen uit (18). Iedere vergelijking van de tweede graad in x en y, waarvan de coëfficiënten van x en y dezelfde zijn, en waarin geen term met xy voorkomt, stelt een cirkel voor.

Daar de transformatieformules (17) van de 1e graad zijn, zowel in

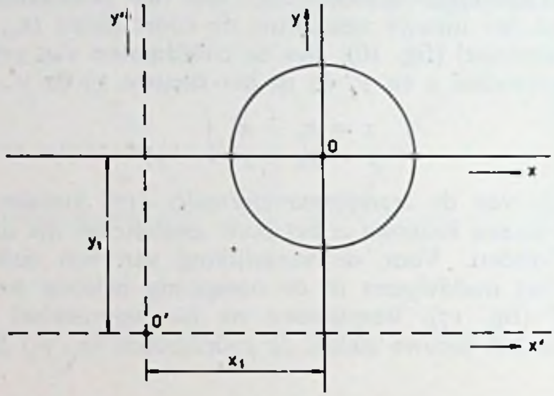


Fig. 17. De vergelijking van een cirkel met een straal R en (x_1, y_1) als coördinaten van het middelpunt, is $(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2$.

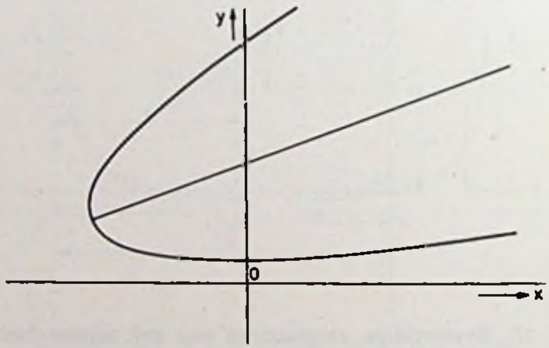


Fig. 18. Parabool, waarvan de as niet evenwijdig is aan een der coördinatenassen.

x en y als in x' en y', blijft de graad van de vergelijking bij verschuiving van het assenkruis ongewijzigd. Ook bij draaiing van het assenkruis zijn de transformatieformules, die in dat geval moeten worden gebruikt, van de 1e graad, zodat ook dan de graad van de vergelijking dezelfde blijft. De vergelijking van de in fig. 18 getekende parabool, waarvan de as niet evenwijdig is aan een der coördinatenassen, is dus ook van de 2e graad.

8. Kegelsneden

De doorsnede van een rechte cirkelkegel, waarbij we de beschrijvende lijnen door de top verlengd denken, met een plat vlak noemen

we een kegelsnede (fig. 19). Als het vlak loodrecht staat op de as van de kegel, is de doorsnede een *cirkel*. Is de hoek tussen de as van de kegel en het vlak kleiner dan 90°, doch groter dan de halve tophoek, dan is de doorsnede een *ellips*. Is deze hoek kleiner dan de halve top-

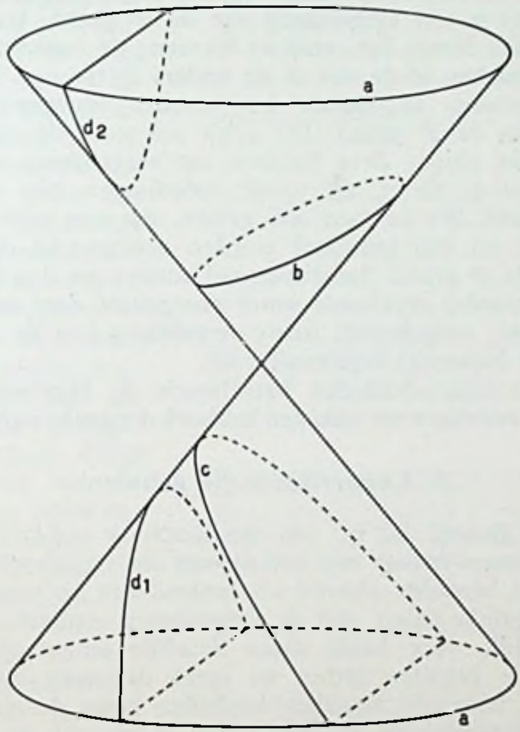


Fig. 19. Kegelsneden: a. cirkels; b. ellips; c. parabool; d_1,d_2. hyperbool.

hoek, zodat de beide gedeelten van de kegel worden gesneden, dan is de doorsnede een *hyperbool*. Is deze hoek gelijk aan de halve tophoek, zodat het snijvlak evenwijdig is aan een raakvlak aan de kegel, dan ontstaat een *parabool*. Gaat het snijvlak door de top van de kegel, dan noemen we de doorsneden *ontaarde kegelsneden*. Een cirkel en een ellips ontaarden daarbij in een enkel punt, een hyperbool in twee elkaar snijdende rechte lijnen, een parabool in een enkele lijn, die we kunnen beschouwen als twee samengevallen rechte lijnen. Verder kunnen we een cilinder beschouwen als een ontaarde kegel, nl. als een kegel met de top op oneindig. Daarbij kunnen we nog een ontaarde parabool verkrijgen, door deze cilinder te snijden met een vlak evenwijdig aan een raakvlak, dus evenwijdig aan de as. We verkrijgen dan als ontaarde kegelsnede twee evenwijdige lijnen, die we als een ontaarde

parabool, doch ook als een ontaarde hyperbool kunnen opvatten.

We hebben gezien, dat iedere rechte lijn kan worden voorgesteld door een vergelijking van de 1e graad, en dat omgekeerd iedere vergelijking van de 1e graad een rechte lijn voorstelt. Beschouwen we nu twee rechte lijnen: $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ en $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$. We vormen hiervan het product $(A_1 x + B_1 y + C_1)(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0$. Dit is een vergelijking van de 2e graad. Ieder punt, dat op een der beide lijnen ligt, voldoet hieraan; de coördinaten van een zodanig punt maken óf de ene óf de andere factor nul. We zien dus, dat iedere ontaarde kegelsnede kan worden voorgesteld door een vergelijking van de 2e graad. Dit geldt ook voor de ontaarde cirkel en de ontaarde ellips; deze hebben tot vergelijking $a(x - x_1)^2 + b(y - y_1)^2 = 0$, als x_1 en y_1 de coördinaten zijn van het desbetreffende punt. We hebben ook gezien, dat een cirkel, een ellips, een hyperbool en een parabool worden voorgesteld door een vergelijking van de 2e graad. Samenvattend kunnen we dus zeggen: *iedere* (al of niet ontaarde) *kegelsnede wordt voorgesteld door een vergelijking van de 2e graad;* omgekeerd: *iedere vergelijking van de 2e graad stelt een* (al of niet ontaarde) *kegelsnede voor.*

Voor nadere bijzonderheden betreffende de kegelsneden en hun vergelijkingen verwijzen we naar een leerboek der analytische meetkunde.

9. Logarithmische schalen

We hebben gezien, dat we van een functie $y = f(x)$ een grafische voorstelling kunnen maken met behulp van een rechthoekig assenkruis. We nemen een bepaalde afstand als eenheid aan en verdelen de x-as en de y-as in gelijke delen, met de aangenomen eenheid. Het is echter niet noodzakelijk, voor beide assen dezelfde lengte als eenheid te nemen. In vele gevallen zetten we langs de assen ongelijksoortige grootheden af, zodat de aantallen eenheden langs de assen afhangen van de maat, waarmee we de grootheden meten. Als we bv. de temperatuur in een kamer uitzetten als functie van de tijd, kunnen we langs de horizontale as 1 cm = 1 uur stellen, doch ook wel 1 cm = 1 dag, of 1 cm = 1 minuut. Langs de verticale as zouden we kunnen nemen 1 cm = 1 graad Celsius, doch ook 1 cm = 10 graden Celsius of 1 cm = = 1 graad Fahrenheit. We kiezen in ieder geval de schalen zo, dat een duidelijke grafiek wordt verkregen. Verder is het ook niet altijd nodig of gewenst, het nulpunt van de schaalverdeling te laten samenvallen met het snijpunt der assen. Wordt bv. de temperatuur van een zieke in een grafiek opgetekend, dan komt alleen het temperatuurgebied van 35 °C tot 42 °C in aanmerking, zodat langs de verticale as bij het snijpunt der assen 35 °C komt te staan.

In vele gevallen is het niet in de eerste plaats van belang aan te geven, hoeveel een bepaalde grootheid toeneemt, doch in welke verhouding deze grootheid toeneemt. In dat geval maken we gebruik van een logarithmische schaal. Daarbij wordt de logarithme van de

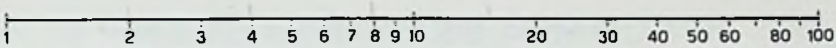
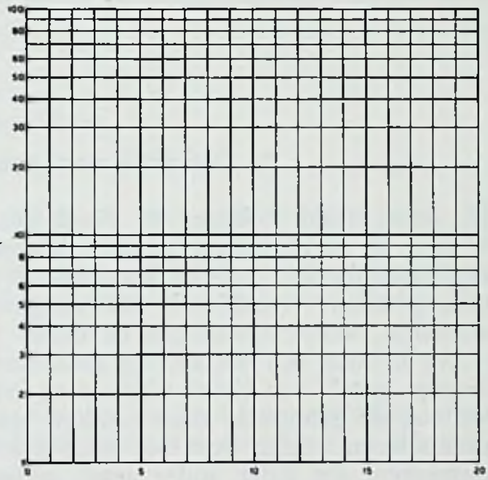


Fig. 20. Logarithmische schaalverdeling.

desbetreffende grootheid op een lineaire schaal uitgezet (zie fig. 20). Wordt een grootheid twee maal zo groot, dan neemt de logarithme toe met log 2. Nemen we bv. log 2 = 16 mm, dan plaatsen we aan het begin van de as het cijfer 1, 16 mm verder het cijfer 2, weer 16 mm verder het cijfer $2^2 = 4$, weer 16 mm verder het cijfer $2^3 =$ $= 8$ enz. Op deze wijze wordt een verdeling verkregen volgens fig. 20. Dit noemen we een logarithmische schaal. Naar behoefte nemen we de verdeling langs beide assen lineair, of langs de ene as lineair en langs de andere logarithmisch, of langs beide assen logarithmisch, zoals fig. 21 aangeeft. In de volgende delen komen vele voorbeelden van op logarithmische schaal uitgezette krommen voor.

a



b

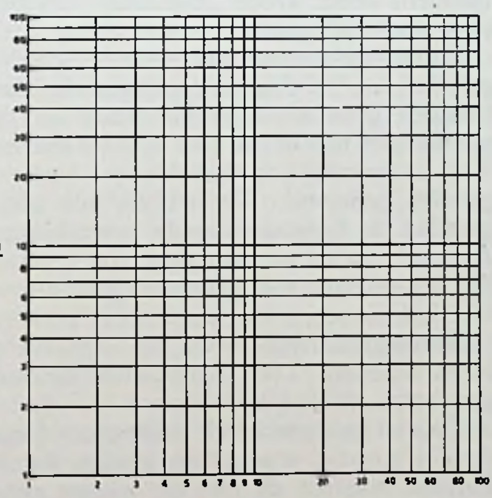


Fig. 21. a. Enkel-logarithmische verdeling; b. dubbel-logarithmische verdeling.

Uit $y = a^x$ volgt: $\log y = x \log a$. Wanneer we langs de x-as een lineaire en langs de y-as een logarithmische schaal nemen, wordt dus de functie $y =$ $= a^x$ voorgesteld door een rechte lijn, waarvan de helling van a afhangt.

Uit $y = x^a$ volgt: $\log y = a \log x$. Wanneer we langs beide assen een logarithmische schaal nemen, wordt $y = x^a$ dus voorgesteld door een rechte lijn, waarvan de helling weer afhangt van a.

IV. COMPLEXE GETALLEN

1. Definitie van complexe getallen

In onze jeugd hebben we reeds kennis gemaakt met de getallen 1, 2, 3, 4, 5, enz. Deze getallen noemen we de *natuurlijke getallen*, een naam die zeer voor de hand ligt. We hebben geleerd, hoe we met deze getallen verschillende bewerkingen kunnen uitvoeren: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

We hebben ook *nul* als een getal leren beschouwen, waardoor het begrip „getal" een kleine uitbreiding kreeg. Met dit getal nul kunnen we ook de genoemde rekenkundige bewerkingen uitvoeren, met één uitzondering: delen door het getal nul kan niet. (Misschien zal men opmerken, dat ieder ander getal, gedeeld door nul, „oneindig" tot quotiënt heeft. Doch „oneindig" noemen we geen getal, zodat delen door nul niet gaat.)

Later hebben we het begrip „getal" uitgebreid met de *gebroken getallen*, bv. $^3/_4$, $3^3/_4$, 12,375 (tiendelige breuken nemen naast de gewone breuken geen afzonderlijke plaats in; het zijn breuken, waarvan de noemer een macht van tien is, doch die verder niets bijzonder vertonen). Ter onderscheiding hebben we toen de andere getallen de *gehele getallen* genoemd. We hebben ook geleerd, hoe met deze gebroken getallen de bovengenoemde bewerkingen kunnen worden uitgevoerd. Anders zouden we aan deze soort getallen niets hebben. We weten, dat het rekenen met gebroken getallen ook practisch nut heeft. Anders zou het invoeren van deze soort getallen weinig zin hebben.

Vervolgens hebben we de *negatieve getallen* ingevoerd en er mee leren rekenen. Toen hebben we de andere getallen *positieve getallen* genoemd.

Daarna hebben we de *onmeetbare* (irrationele) *getallen* leren kennen (bv. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, π enz.) en gezien, dat we er op dezelfde wijze mee kunnen rekenen als met de overige getallen. Deze laatste hebben we toen *meetbare* (rationele) getallen genoemd.

Op deze wijze heeft het begrip „getal" telkens een uitbreiding ondergaan. Doch men kan nog andere soorten getallen invoeren en daarmee het begrip „getal" nog verder uitbreiden. De volgende stap is het invoeren van *complexe getallen*. In tegenstelling daarmee noemen we nu alle andere reeds genoemde soorten *reële getallen*. We willen deze complexe getallen thans nader beschouwen. Daartoe spreken we eerst af wat we onder complexe getallen verstaan. Vervolgens gaan we

na, hoe we met deze nieuwe soort getallen kunnen rekenen. Daarbij zullen we zien, dat hierbij vrijwel dezelfde rekenregels gelden als bij de reële getallen. Dat het invoeren en gebruiken der complexe getallen practisch nut en dus zin heeft, zal in de volgende delen van dit werk overvloedig blijken.

De vergelijking
$$x^2 - 1 = 0 \quad \text{(1)}$$
heeft twee oplossingen: $x_1 = +1$ en $x_2 = -1$.

Trachten we echter de vergelijking
$$x^2 + 1 = 0 \quad \text{(2)}$$
op te lossen, dan vinden we onder de reële getallen geen getal, dat aan deze vergelijking voldoet. Om toch deze vergelijking te kunnen oplossen moeten we dus een nieuw soort getallen invoeren. Stellen we een oplossing van deze vergelijking voor door de letter j, dan is dus $j^2 + 1 = 0$, of, wat hetzelfde is,
$$j^2 = -1. \quad \text{(3)}$$

Is er echter een oplossing j, dan is $-j$ ook een oplossing, want $(-j)^2 = (+j)^2 = j^2$, op dezelfde wijze als $(-a)^2 = (+a)^2 = a^2$. Dus ook:
$$(-j)^2 = -1. \quad \text{(4)}$$

We spreken dus *niet* af, dat j gelijk is aan $\sqrt{-1}$, want dat zou dubbelzinnig zijn en tot misverstand aanleiding kunnen geven, daar een vierkantswortel zowel positief als negatief kan zijn. We beschouwen (3) als de definitie van j, een „getal" van een nieuwe soort. We kunnen nu gemakkelijk meer getallen van deze soort vormen. Evenals we $3 \times a$ schrijven als $3a$, is ook $3 \times j = j3$. Verder is $(j3)^2 = j^2 \times 3^2 = -9$; doch ook is $(-j3)^2 = (-j)^2 \times 3^2 = -9$ volgens (4).

Nu kunnen we ook de vergelijking
$$x^2 + a^2 = 0 \quad \text{(5)}$$
oplossen en vinden: $x_1 = j\,a$ en $x_2 = -j\,a$. Men kan dit controleren door deze x_1 of x_2 in (5) te substitueren.

We noemen $+j$, $-j$, $+j\,a$ en $-j\,a$ *imaginaire getallen* en $+j$ de *imaginaire eenheid*. Deze imaginaire getallen betekenen niets anders, dan dat zij met behulp van de definitie (= afspraak) (3) aan de vergelijking (2) of (5) voldoen.

In de wiskunde stelt men de imaginaire eenheid gewoonlijk voor door de letter i, doch daar deze letter in de electrotechniek reeds wordt gebruikt om een electrische stroom aan te duiden, bezigt men daar voor de imaginaire eenheid de letter j.

Nu kan men nog een stap verder gaan en een combinatie vormen van een reëel en een imaginair getal, bv. $a + j\,b$. Dergelijke getallen noemen we *complexe getallen*, en noemen a het *reële deel*, $j\,b$ het *imaginaire deel*. Al lijkt het op het eerste gezicht wat vreemd deze complexe

getallen ook getallen te noemen, we zullen zien, hoe we er mee kunnen rekenen en later zal blijken, dat we er in de wisselstroomtechniek en in het bijzonder in de radiotechniek een zeer nuttig gebruik van kunnen maken. Met behulp van complexe getallen kan men op eenvoudige wijze berekeningen uitvoeren, die zonder hulp van deze getallen zeer ingewikkeld zouden zijn.

Eerst maken we over de complexe getallen twee afspraken.

a. We noemen twee complexe getallen $a + jb$ en $c + jd$ gelijk, indien zowel de reële delen als de imaginaire delen gelijk zijn, dus als $a = c$ en $b = d$. Is bv. $a = c$ en $b \neq d$, of $a \neq c$ en $b = d$, dan noemen we $a + jb$ en $c + jd$ ongelijk, even goed als wanneer $a \neq c$ en $b \neq d$.

b. Bij complexe getallen spreken we niet over groter en kleiner. We zeggen bv. niet, dat $6 + j7$ groter is dan $2 + j3$; we zeggen alleen, dat $6 + j7$ en $2 + j3$ ongelijk zijn.

2. Bewerkingen met complexe getallen

We spreken af, dat de som van twee complexe getallen een complex getal is, waarvan het reële deel gelijk is aan de som der reële delen en het imaginaire deel gelijk is aan de som der imaginaire delen. Dus

$$(a + jb) + (c + jd) = (a + c) + j\,(b + d). \qquad (6)$$

Op overeenkomstige wijze is het verschil van twee complexe getallen een complex getal, waarvan het reële deel het verschil is der reële delen en het imaginaire deel het verschil der imaginaire delen. Dus

$$(a + jb) - (c + jd) = (a - c) + j\,(b - d). \qquad (7)$$

Uit (6) volgt, dat men een complex getal met een reëel getal kan vermenigvuldigen, door zowel het reële deel als het imaginaire deel er mee te vermenigvuldigen. Dus

$$\begin{aligned} &(a + jb) + (a + jb) = 2a + j2b; \\ &3\,(a + jb) = 3a + j3b; \\ &n\,(a + jb) = na + jnb. \qquad (8) \end{aligned}$$

Wat moeten we nu verstaan onder het product van twee complexe getallen? Dat volgt niet uit (6) of (8). Daarover moeten we een doelmatige afspraak maken. We spreken af, dat men het product van twee complexe getallen vindt door de vermenigvuldiging formeel uit te voeren alsof j een reëel getal voorstelde, en daarna volgens (3) j^2 te vervangen door -1. Dus

$$\begin{aligned} (a + jb)\,(c + jd) &= ac + jbc + jad + j^2bd = \\ &= (ac - bd) + j\,(bc + ad) \qquad (9) \end{aligned}$$

Daar $j^2 = -1$ is $j^3 = -j$; $j^4 = j^3 \times j = -j \times j = -(-1) = +1$; $j^5 = j \times j^4 = j$ enz. Algemeen is dus

$$\left.\begin{aligned} j^{4n} &= +1; \\ j^{4n+1} &= +j; \\ j^{4n+2} &= -1; \\ j^{4n+3} &= -j. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Hier stelt n een willekeurig positief geheel getal voor.

Onder a^{-3} verstaat men $\frac{1}{a^3}$. Evenzo verstaat men onder j^{-3}: $\frac{1}{j^3} = \frac{j}{j^4} = \frac{j}{+1} = j$. Op dezelfde wijze blijkt: $\frac{1}{j} = -j$; $\frac{1}{-j} = +j$. Men kan op deze wijze gemakkelijk aantonen, dat de betrekkingen (10) ook gelden voor negatieve waarden van n.

Naast het complexe getal $a + jb$ kan men ook het complexe getal $a - jb$ vormen, dat van het eerste alleen verschilt in het teken van het imaginaire deel. Men noemt $a + jb$ en $a - jb$ *toegevoegd complexe getallen*. Twee toegevoegd complexe getallen bezitten de merkwaardige eigenschap, dat zowel hun som als hun product reëel is.

$$(a + jb) + (a - jb) = (a + a) + j(b - b) = 2a; \qquad (11)$$

$$(a + jb)(a - jb) = a^2 + jab - jab - j^2 b^2 = a^2 + b^2. \qquad (12)$$

Men kan een complex getal door een reëel getal delen door zowel het reële als het imaginaire deel door dit getal te delen:

$$\frac{a + jb}{p} = \frac{a}{p} + j\frac{b}{p}. \qquad (13)$$

Men kan een reëel of een complex getal door een complex getal delen door gebruik te maken van (13). $\frac{a + jb}{c + jd}$ is weer een complex getal, waarvan men het reële en het imaginaire deel wenst te kennen. Als de noemer reëel is, kunnen we de deling uitvoeren volgens (13). Nu de noemer complex is, maken we deze eerst reëel, door teller en noemer te vermenigvuldigen met de toegevoegd complexe van de noemer.

$$\frac{a + jb}{c + jd} = \frac{(a + jb)(c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2} =$$

$$= \frac{ac + ad}{c^2 + d^2} + j\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \qquad (14)$$

Als bijzonder geval hiervan kan men beschouwen:

$$\frac{a}{c + jd} = \frac{a(c - jd)}{(c + jd)(c - jd)} = \frac{ac - jad}{c^2 + d^2}. \qquad (15)$$

3. Voorstelling van complexe getallen door vectoren en door modulus en argument

In een plat vlak kan men het complexe getal $a + j\,b$ afbeelden door het punt P met coördinaten a als abscis en b als ordinaat (fig. 1). Het punt P, waarvoor $x = 4$ en $y = 5$, is dus de afbeelding van het complexe getal $4 + j\,5$. In plaats van door het punt P kan men dit complexe getal ook afbeelden door de pijl $\overrightarrow{OP}$ (fig. 2). Een dergelijke pijl heet *vector*. Deze vector is volledig bepaald door de coördinaten van het eindpunt, dus door het reële deel en de coëfficiënt van j van

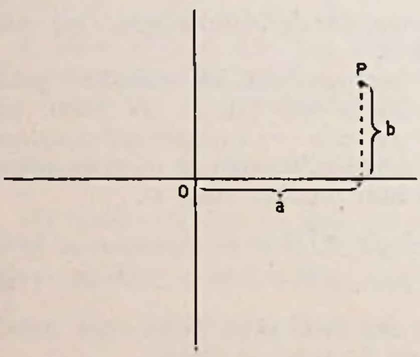


Fig. 1. Het punt P is de voorstelling van het complexe getal $a + j\,b$.

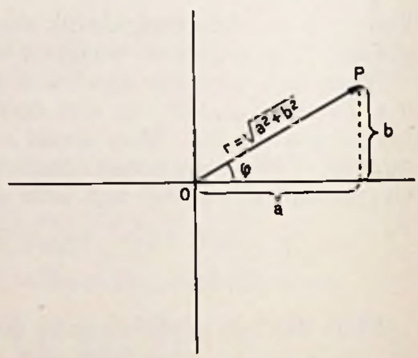


Fig. 2. De pijl $\overrightarrow{OP}$ is de voorstelling van het complexe getal $a + j\,b$.

het complexe getal, dat door deze vector wordt voorgesteld. Maar deze vector is ook volledig gegeven door zijn *lengte* $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ en de *hoek* φ, die de vector maakt met een der assen. Het is gebruikelijk bij de voorstelling van complexe getallen door vectoren, het reële deel uit te zetten langs de horizontale as, en wel naar rechts positief, naar links negatief, en het aantal imaginaire eenheden langs de verticale as, naar boven positief, naar beneden negatief. De lengte van de vector rekent men positief van O af, onverschillig wat de richting van de vector is; de hoek φ rekent men positief van de positieve x-as af links om tot aan de richting van de vector, zoals in fig. 3 voor de vier kwadranten is aangegeven. De lengte r van de vector noemt men de *modulus* (meervoud: moduli), de hoek φ het *argument* van het complexe getal.

Een complex getal kan men dus aangeven door het aantal reële eenheden a en het aantal imaginaire eenheden b, of door de modulus r en het argument φ. Het verband tussen a en b enerzijds en r en φ anderzijds volgt uit fig. 2:

$$\left.\begin{aligned} a &= r\cos\varphi; \\ b &= r\sin\varphi; \end{aligned}\right\} \text{ of } \left\{\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2+b^2}; \\ \varphi &= \operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}. \end{aligned}\right. \qquad \ldots\ldots\ldots \text{(16)}$$

Hieruit volgt:

$$\left.\begin{aligned} a + j\,b &= r\,(\cos\varphi + j\sin\varphi); \\ a - j\,b &= r\,(\cos\varphi - j\sin\varphi). \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots \text{(17)}$$

($\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$ bepaalt φ niet eenduidig, want $\varphi + \pi$ heeft dezelfde tg als φ, doch geeft het complexe getal het tegengestelde teken.)

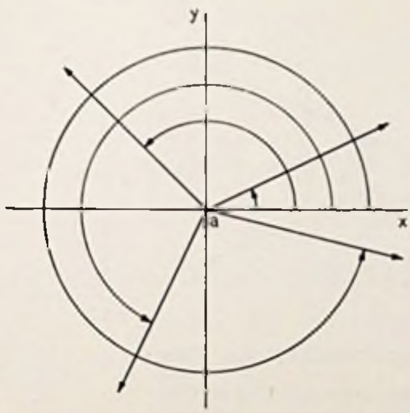


Fig. 3. Bij de voorstelling van complexe getallen door vectoren rekent men het argument positief zoals door de cirkelbogen is aangegeven.

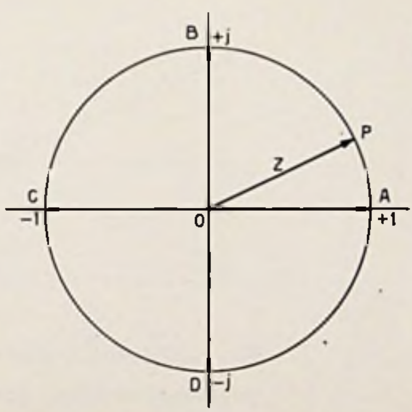


Fig. 4. Het complexe getal $z = \cos\varphi + j\sin\varphi$ wordt voorgesteld door de pijl $\overrightarrow{OP}$, waarvan het eindpunt P ligt op de cirkel met O als middelpunt en een straal 1.

Een reëel getal kan men, evenals het reële deel van een complex getal, beschouwen als een complex getal, waarvan het imaginaire deel nul is of waarvan het argument nul of π is; men kan het dus voorstellen door een vector langs de positieve of negatieve reële as. Een zuiver imaginair getal kan men, evenals het imaginaire deel van een complex getal, beschouwen als een complex getal, waarvan het reële deel nul is; men kan het dus voorstellen door een vector langs de positieve of negatieve imaginaire as.

Uit fig. 2 of (16) of (17) volgt, dat een complex getal niet verandert, indien men het argument met een geheel aantal malen 2π vermeerdert of vermindert.

De modulus $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ van het complexe getal $a + j\,b$ duidt men aan door $|a + j\,b|$; dus is ook $|a| = a$; $|j\,b| = b$; $|-a| = a$; $|-j\,b| = b$.

Het complexe getal $\cos\varphi + j\ \sin\varphi$ heeft tot modulus 1, want $\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$, en wordt voorgesteld door een vector, waarvan het eindpunt ligt op de cirkel met O als middelpunt en met straal 1 (fig. 4). Deze cirkel noemt men eenheidscirkel.

In fig. 5 ziet men:

1e. twee toegevoegd complexe getallen zijn elkaars spiegelbeeld ten opzichte van de reële as;

2e. men kan een complex getal met — 1 vermenigvuldigen of door — 1 delen door de richting van de vector om te keren of door het argument met π te vermeerderen of te verminderen.

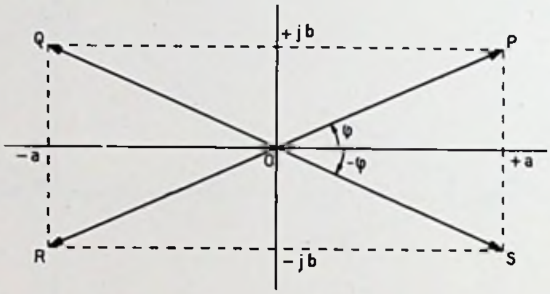


Fig. 5. $\overrightarrow{OP}$ en $\overrightarrow{OS}$ zijn de voorstelling van twee toegevoegd complexe getallen; eveneens $\overrightarrow{OQ}$ en $\overrightarrow{OR}$. Verder is $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OR}$ en $\overrightarrow{OQ} = -\overrightarrow{OS}$.

4. De hoofdbewerkingen met complexe getallen, voorgesteld door vectoren of door modulus en argument

a. Optellen

Volgens de definitie van optellen van complexe getallen [form. (6)] is $(a + j\,b) + (c + j\,d) = (a + c) + j\,(b + d)$. In fig. 6 wordt $a + j\,b$ voorgesteld door $\overrightarrow{OA}$, $c + j\,d$ door $\overrightarrow{OC}$. De diagonaal $\overrightarrow{OB}$ van het parallelogram OABC stelt de som voor, want zijn projectie op de reële as is $a + c$ en zijn projectie op de imaginaire as is $b + d$. Om dus twee complexe getallen of vectoren op te tellen, verschuift men de ene evenwijdig aan zichzelf, zodat zijn beginpunt op het eindpunt van de andere valt. Het is dus doelmatig af te spreken, dat een complex getal wordt voorgesteld door een vector, die bepaald is wat zijn lengte en zijn richting betreft, maar een willekeurig punt in het complexe vlak als beginpunt heeft. Om meer complexe getallen op te tellen herhaalt men deze bewerking: men zet de vectoren achter elkaar met de juiste lengte en richting; de vector van het beginpunt van de

eerste term naar het eindpunt van de laatste term is de som (fig. 7).

Hebben alle termen van de som hetzelfde argument, dan is de modulus van de som gelijk aan de som van de moduli der termen; hebben niet alle termen hetzelfde argument, dan is de modulus van de som kleiner dan de som van de moduli der termen.

b. Aftrekken

Evenals bij het aftrekken van reële getallen vindt men het verschil van twee complexe getallen door bij het aftrektal de aftrekker met tegengesteld teken op te tellen. Men vindt de aftrekker met tegengesteld teken door de vector de tegengestelde richting te geven (fig. 8).

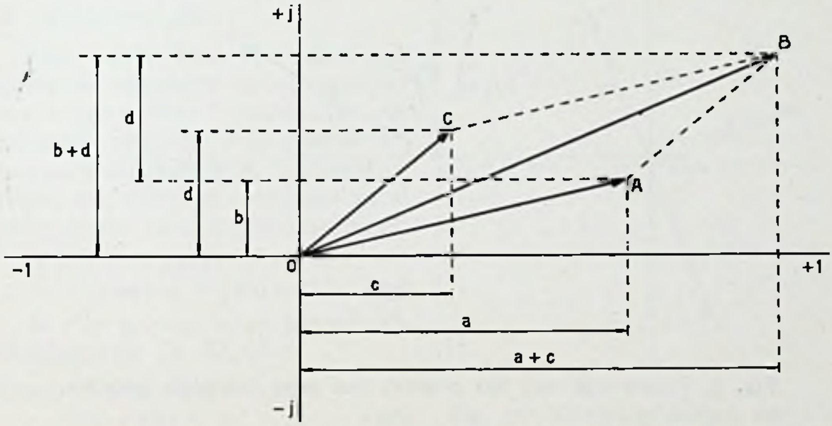


Fig. 6. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$.

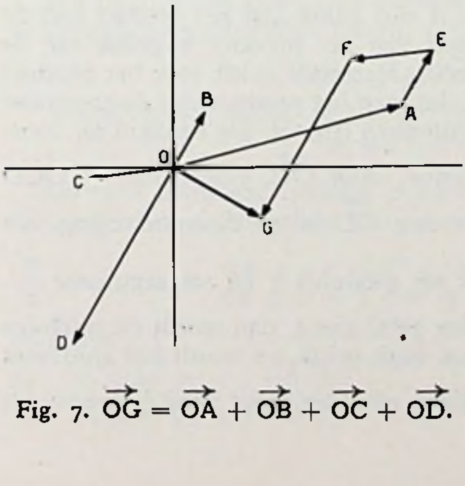


Fig. 7. $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

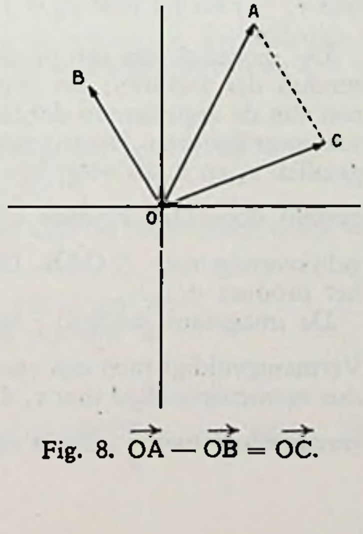


Fig. 8. $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.

c. Vermenigvuldigen

Bij het vermenigvuldigen is het doelmatig, de complexe getallen voor te stellen met modulus en argument.

Zij $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)$ en $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$.
Het product is

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2 \{(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + j (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 +$$
$$+ \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)\} = r_1 r_2 \{\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\} \quad \ldots (18)$$

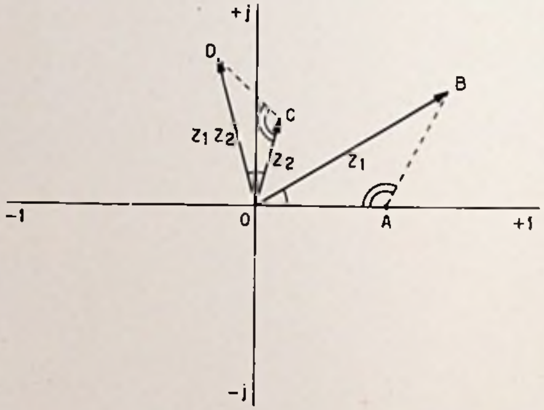


Fig. 9. Constructie van het product van twee complexe getallen.

Uit (18) volgt, door $r_1 = r_2 = 1$ te stellen,
$(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$.
Omgekeerd kan men dus $\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$ ontbinden in $(\cos \varphi_1 + j \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + j \sin \varphi_2)$.

De modulus van een product is dus gelijk aan het *product* van de moduli der factoren; het *argument* van het product is gelijk aan de *som* van de argumenten der factoren. Hetzelfde geldt voor het product van meer factoren. Hieruit volgt, dat men het product van de complexe getallen z_1 en z_2 als volgt kan *construeren* (fig. 9). De eenheid zij voorgesteld door $\overrightarrow{OA}$, z_1 door $\overrightarrow{OB}$ en z_2 door $\overrightarrow{OC}$. Construeer $\triangle$ OCD gelijkvormig met $\triangle$ OAB. De vector $\overrightarrow{OD}$ is nu de voorstelling van het product $z_1 z_2$.

De imaginaire eenheid j heeft tot modulus 1 en tot argument $\frac{\pi}{2}$. Vermenigvuldigt men een complex getal met j, dan wordt de modulus dus vermenigvuldigd met 1, d.w.z. blijft gelijk, en wordt het argument vermeerderd met $\frac{\pi}{2}$. Deelt men een complex getal door j, dan wordt

de modulus gedeeld door 1, d.w.z. blijft weer gelijk, en wordt het argument verminderd met $\frac{\pi}{2}$. Vermenigvuldigen met j komt dus neer op het draaien van de vector over een hoek $\frac{\pi}{2}$ (= 90°) in positieve richting (d.i. linksom); delen door j (of, wat hetzelfde is, vermenigvuldigen met $-j$) komt neer op het draaien van de vector over een hoek $\frac{\pi}{2}$ (= 90°) in negatieve richting (rechtsom). De lengten der vectoren blijven hierbij onveranderd (fig. 10).

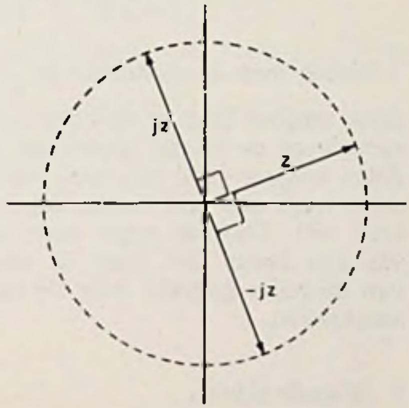


Fig. 10. Vermenigvuldigen met j betekent het draaien van de vector over 90° linksom; vermenigvuldigen met $-j$ betekent het draaien van de vector over 90° rechtsom.

d. Machtsverheffen

Een macht met een natuurlijk getal als exponent is het product van enige gelijke factoren. De berekening verloopt dus, evenals bij het vermenigvuldigen, het eenvoudigst, als men het complexe getal schrijft met modulus en argument.

$$\{r(\cos\varphi + j\sin\varphi)\}^n = $$
$$= r^n(\cos n\varphi + j\sin n\varphi) \ldots \quad (19)$$

Is $r = 1$, dan volgt hieruit de stelling van *De Moivre*:

$$(\cos\varphi + j\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + $$
$$+ j\sin n\varphi \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

De formules (19) en (20) gelden voor iedere reële waarde van n, d.w.z. ook als n geen geheel getal is.

Met behulp van form. (20) kunnen we $\sin n\varphi$ en $\cos n\varphi$ uitdrukken in $\sin\varphi$ en $\cos\varphi$ [zie hfdst. I, form. (15)]. Als voorbeeld nemen we $n = 3$.

$$(\cos\varphi + j\sin\varphi)^3 =$$
$$= \cos^3\varphi + j\,3\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - j\sin^3\varphi =$$
$$= \cos 3\varphi + j\sin\varphi.$$

Als twee complexe getallen gelijk zijn, zijn de reële delen gelijk en de imaginaire delen gelijk, dus

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi;$$
$$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

e. Delen

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + j\sin\varphi_2)}$ is, volgens de definitie van delen, het

getal, dat met r_2 (cos $\varphi_2 + j$ sin φ_2) vermenigvuldigd, r_1 (cos $\varphi_1 +$ $+ j$ sin φ_1) oplevert, dus is

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \{\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\}. \quad \ldots\ldots\ldots (21)$$

Van het quotiënt van twee complexe getallen is de *modulus* gelijk aan het *quotiënt* der moduli en het *argument* gelijk aan het *verschil* der argumenten.

Hieruit volgt:

$$\left|\frac{a + jb}{c + jd}\right| = \frac{|a + jb|}{|c + jd|} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{c^2 + d^2}}. \quad \ldots\ldots\ldots (22)$$

Indien men de modulus van $\dfrac{a + jb}{c + jd}$ zou berekenen door deze breuk eerst volgens (14) te splitsen in een reëel en een imaginair deel en vervolgens de wortel te trekken uit de som der kwadraten van beide delen volgens (16), zou men natuurlijk tot dezelfde uitkomst geraken, doch langs een veel omslachtiger weg (de lezer voere deze berekening eens uit). Daarom make men voor de berekening van de modulus van een breuk niet eerst de noemer reëel, doch neme de modulus van de teller gedeeld door de modulus van de noemer, zoals in (22) aangegeven.

f. Worteltrekken

Uit (19) volgt, door n te vervangen door $\dfrac{1}{n}$:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + j\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\varphi}{n} + j\sin\frac{\varphi}{n}). \quad \ldots\ldots (23)$$

Een complex getal verandert niet, als men het argument met enige malen 2π vermeerdert of vermindert. Dus

$$z = r(\cos\varphi + j\sin\varphi) = r\{\cos(\varphi + 2k\pi) + j\sin(\varphi + 2k\pi)\},$$

waarbij k een willekeurig geheel getal is, dus

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\,(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + j\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}). \quad \ldots\ldots (24)$$

Voor $k = 0, 1, 2, 3, \ldots (n - 1)$ krijgt men n verschillende waarden van het argument van $\sqrt[n]{z}$; voor $k = n, n + 1, \ldots$ krijgt men weer dezelfde waarden als voor $k = 0, 1, 2, \ldots$ Er zijn dus *n verschillende waarden.* Dit geldt ook voor de reële en zuiver imaginaire getallen, die immers als bijzondere gevallen van complexe getallen kunnen worden beschouwd.

Elk complex getal heeft dus n verschillende n^e^-machtswortels.
Zo is bv. (fig. 11)

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{(\cos 0 + j \sin 0)} = +1 \text{ en}$$

$$= \sqrt[3]{(\cos 2\pi + j \sin 2\pi)} = \cos \frac{2\pi}{3} + j \sin \frac{2\pi}{3} =$$

$$= -{}^1/_2 + j \times {}^1/_2 \sqrt{3}, \text{ en}$$

$$= \sqrt{(\cos 4\pi + j \sin 4\pi)} = \cos \frac{4\pi}{3} + j \sin \frac{4\pi}{3} =$$

$$= -{}^1/_2 - j \times {}^1/_2 \sqrt{3}.$$

$$\sqrt{j} = \sqrt{(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2})} = \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} = {}^1/_2 \sqrt{2} + j \times {}^1/_2 \sqrt{2}, \text{ en}$$

$$= \sqrt{(\cos 2{}^1/_2 \pi + j \sin 2{}^1/_2 \pi)} = \cos {}^5/_4 \pi + j \sin {}^5/_4 \pi =$$

$$= -{}^1/_2 \sqrt{2} - j \times {}^1/_2 \sqrt{2} \quad \text{(fig. 12)}.$$

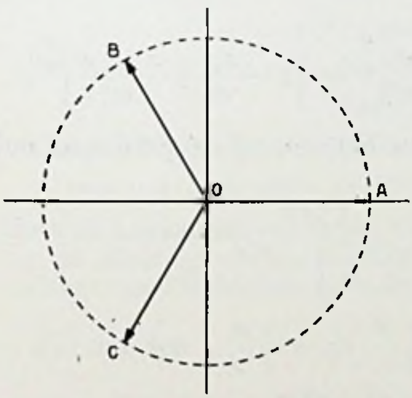


Fig. 11. De drie derdemachtswortels uit + 1: OA, OB en OC.

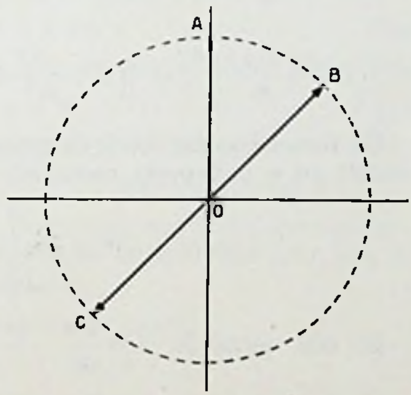


Fig. 12. De twee tweedemachtswortels uit $+ j$ (= OA), nl. OB en OC.

5. Machtsverheffen met een complexe exponent

Het grondtal van het natuurlijke logarithmenstelsel is gedefinieerd als

$$e = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

Is x een positief getal, dan gaat $\frac{m}{x}$ ook naar ∞ als m naar ∞ gaat, dus is ook

$$e = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^{\frac{m}{x}}.$$

Hieruit volgt:

$$e^x = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m.$$

In overeenstemming hiermee definiëren we:

$$e^{x+jy} = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{x+jy}{m}\right)^m. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Op deze wijze hebben we aan een complexe exponent betekenis toegekend.

$\left(1 + \frac{x+jy}{m}\right)^m$ is een complex getal. We kunnen dus stellen:

$$e^{x+jy} = r(\cos\varphi + j\sin\varphi). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

We willen nu de modulus r en het argument φ van het complexe getal e^{x+jy} uitdrukken in x en y.

Berekening van de modulus r.

$$\left|\left(1+\frac{x+jy}{m}\right)^m\right| = \left\{\left(1+\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{y^2}{m^2}\right\}^{\frac{m}{2}} = \left\{1 + \frac{2x}{m} + \frac{x^2+y^2}{m^2}\right\}^{\frac{m}{2}}.$$

De limiet hiervan heeft de gedaante $\lim\,(1 + \alpha)^n$, waarbij α tot nul nadert en n onbeperkt toeneemt.

$$\mathrm{Lim}\,(1+\alpha)^n = \lim \left\{ (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \right\}^{\alpha n} = e^{\lim \alpha n}.$$

In ons geval is $\alpha = \frac{2x}{m} + \frac{x^2+y^2}{m^2}$ en $n = \frac{m}{2}$, dus $\lim\ \alpha n =$

$$= \lim_{m \to \infty} \left(\frac{2x}{m} + \frac{x^2+y^2}{m^2}\right)\frac{m}{2} = x.$$

$$\text{Derhalve is } r = \lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{x+jy}{m}\right)^m = e^x.$$

Berekening van het argument φ.

Stel $1 + \frac{x+jy}{m} = r_1\,(\cos\ \psi + j\ \sin\ \psi)$, waarbij

$$\cos\psi = \frac{1+\frac{x}{m}}{\sqrt{\left(1+\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{y^2}{m^2}}},\ \sin\psi = \frac{\frac{y}{m}}{\sqrt{\left(1+\frac{x}{m}\right)^2 + \frac{y^2}{m^2}}},$$

$\operatorname{tg}\,\psi = \dfrac{\dfrac{y}{m}}{1+\dfrac{x}{m}}$. Het argument van $1+\dfrac{x+jy}{m}$ is ψ; dat van $\left(1+\dfrac{x+jy}{m}\right)^m$ is dus (volgens De Moivre): $m\,\psi$; dat van e^{x+jy} is $\lim m\,\psi$. Als m groot is, is ψ klein en ligt ψ tussen $\sin\psi$ en $\operatorname{tg}\psi$. $m\,\psi$ ligt dus tussen $m\sin\psi = \dfrac{y}{\sqrt{\left(1+\dfrac{x}{m}\right)^2+\dfrac{y^2}{m^2}}}$ en $m\operatorname{tg}\psi = \dfrac{y}{1+\dfrac{x}{m}}$.

Neemt m onbeperkt toe, dan naderen $m\sin\psi$ en $m\operatorname{tg}\psi$ beide tot de limiet y, dus nadert $m\,\psi$ ook tot de limiet y.

Het argument van e^{x+jy} is dus y. Derhalve:

$$e^{x+jy} = e^x(\cos y + j\sin y) \quad \text{............} \quad (28)$$

Door hierin $x = 0$ te stellen vindt men de *formule van Euler*:

$$e^{jy} = \cos y + j\sin y \quad \text{................} \quad (29)$$

Stelt men hierin $y = \pi$, dan vindt men de merkwaardige betrekking

$$e^{j\pi} + 1 = 0 \quad \text{....................} \quad (30)$$

Omgekeerd kan men hieruit weer de stelling van De Moivre afleiden:

$$(\cos y + j\sin y)^n = (e^{jy})^n = e^{jny} = \cos ny + j\sin ny;$$

doch dit kan niet als een bewijs voor de stelling van De Moivre gelden; bij de afleiding van de formule van Euler hebben we juist van de stelling van De Moivre gebruik gemaakt.

Uit $\quad e^{jx} = \cos x + j\sin x$ volgt:

$\quad e^{-jx} = \cos x - j\sin x$.

Opgeteld: $\quad e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos x$;

Afgetrokken: $\quad e^{jx} - e^{-jx} = 2j\sin x$.

$$\text{Dus: } \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}; \quad \cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}. \quad \text{..} \quad (31)$$

V. DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING

1. Het differentiaalquotiënt

In de electriciteitsleer en in het bijzonder in de radiotechniek, ontmoet men herhaaldelijk een zg. differentiaalquotiënt. Aan de hand van de twee gevallen, waarbij wij differentiaalquotiënten nodig zullen hebben, willen wij eerst toelichten, wat een differentiaalquotiënt is.

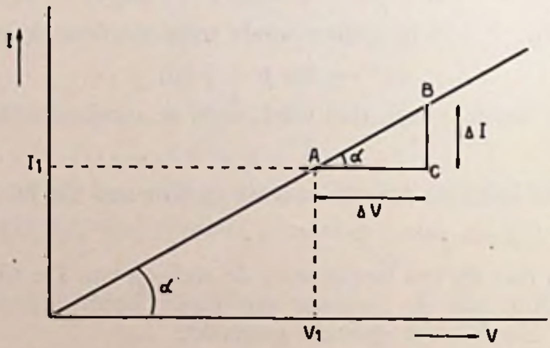


Fig. 1. Grafische voorstelling van de wet van Ohm. tg $\alpha = \frac{1}{R}$.

Sluiten wij een accu met een spanning V van 6 V aan op een weerstand R van 3 Ω, dan vloeit door deze weerstand een stroom I van 2 A. Vervangen we de accu van 6 V door een van 12 V, dan wordt de stroom 4 A. Algemeen: de stroom door de weerstand is evenredig met de aangelegde spanning. Dit is de wet van Ohm, die men kan formuleren als

$$V = I\,R \quad \text{(1)}$$

of als

$$I = \frac{1}{R}V. \quad \text{(2)}$$

Van deze betrekking, die er bestaat tussen de spanning V en de stroom I, kan men een grafische voorstelling maken (fig. 1). Hiertoe tekent men een rechthoekig assenkruis, zet langs de horizontale as de spanning V en langs de verticale as de stroom I uit. Het verband

tussen V en I wordt aangegeven door een rechte lijn door de oorsprong. De helling van deze lijn wordt bepaald door de weerstand R, nl. tg $\alpha = \frac{1}{R}$. Bij een bepaalde spanning V_1 behoort de stroom I_1, gegeven door het punt A. Neemt de spanning toe met een bedrag ΔV (Δ is de Griekse hoofdletter „delta" en wordt in de wiskunde gebruikt om de aangroeiing van een grootheid aan te geven; ΔV betekent dus een zeker bedrag, waarmee we V laten toenemen; hoe groot zo'n aangroeiing precies is, wordt hierbij in het midden gelaten), dan neemt I_1 toe met een bijbehorend bedrag ΔI, gegeven door het punt B. $\frac{1}{R}$ = tg α is gelijk aan $\frac{\text{BC}}{\text{AC}} = \frac{\Delta I}{\Delta V}$. Men noemt ΔI en ΔV differenties, hetgeen verschillen betekent; het quotiënt van deze differenties, $\frac{\Delta I}{\Delta V}$, heet het differentiequotiënt. De grootte van ΔV was willekeurig;

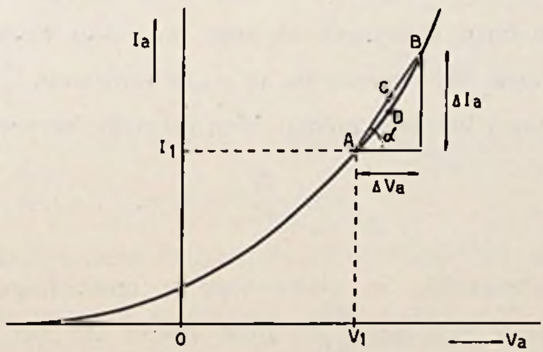


Fig. 2. I_a-V_a-karakteristiek van een diode. $\frac{\Delta I_a}{\Delta V_a}$ = tg α.

nemen we nu eens ΔV half zo groot, dan wordt de bijbehorende waarde van ΔI ook half zo groot en behoudt het differentiequotiënt $\frac{\Delta I}{\Delta V}$ dezelfde waarde. Hoe klein we ΔV ook nemen, steeds blijft $\frac{\Delta I}{\Delta V}$ constant.

In Deel 2, hfdst. IV wordt gesproken over radiobuizen en hun karakteristieken. Daar vinden we o.a. voor een diode het verband tussen de anodespanning V_a en de anodestroom I_a aangegeven door een gebogen lijn (fig. 2). Een diode gedraagt zich dus anders dan een weerstand. Bij een bepaalde anodespanning V_1 behoort een bepaalde anodestroom I_1, gegeven door het punt A. Neemt de anodespanning toe met een bedrag ΔV_a, dan neemt de anodestroom toe met een bedrag ΔI_a, gegeven door het punt B. Trekken we in fig. 2 de rechte

lijn AB, die een hoek α maakt met de richting van de horizontale as, dan is weer het differentiequotiënt $\frac{\Delta I_a}{\Delta V_a} = \text{tg}\ \alpha$. Nemen we nu ΔV_a half zo groot, dan zou de bijbehorende waarde van ΔI ook half zo groot worden, indien het punt C het bijbehorende punt van de karakteristiek was. Doch bij de waarde $V_1 + \frac{\Delta V_a}{2}$ behoort het punt D, zodat ΔI_a sterker vermindert dan ΔV_a. Het differentiequotiënt $\frac{\Delta I_a}{\Delta V_a}$ wordt dus in dit geval kleiner als ΔV_a kleiner wordt genomen.

We trekken nu in het punt A de raaklijn aan de karakteristiek (fig. 3). De hoek, die deze raaklijn maakt met de positieve richting van de horizontale as, noemen we φ. Hoe kleiner we ΔV maken, des te kleiner wordt $\frac{\Delta I_a}{\Delta V_a}$. Toch blijft $\frac{\Delta I_a}{\Delta V_a}$ steeds groter dan tg φ, zoals uit fig. 2 blijkt. Wel kan men de waarde van het differentiequotiënt $\frac{\Delta I_a}{\Delta V_a}$ zo dicht bij tg φ brengen als men wil, door slechts ΔV_a klein genoeg te nemen. We noemen nu tg φ „de limiet van $\frac{\Delta I_a}{\Delta V_a}$ voor ΔV_a naar nul" (limiet betekent grens). Men gebruikt hiervoor de notatie:

$$\lim_{\Delta V_a \to 0} \frac{\Delta I_a}{\Delta V_a} = \text{tg}\ \varphi. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Het is gebruikelijk, in plaats van de omslachtige schrijfwijze $\lim_{\Delta V_a \to 0} \frac{\Delta I_a}{\Delta V_a}$ te schrijven $\frac{dI_a}{dV_a}$. Men noemt dit het *differentiaalquotiënt*. Het merkwaardige hierbij is, dat dit differentiaalquotiënt eigenlijk geen quotiënt is, doch de limiet van een quotiënt, nl. de limiet van het differentiequotiënt. We spreken daarom $\frac{dy}{dx}$ niet uit als „*dy* gedeeld door *dx*", maar als „*dy dx*". Het differentiequotiënt daarentegen is, zoals we hebben gezien, een werkelijk quotiënt van twee grootheden. Is het verband tussen twee grootheden door een kromme gegeven, dan vindt men het differentiaalquotiënt voor een bepaalde waarde van de onafhankelijk veranderlijke, door in het desbetreffende punt van de kromme de raaklijn aan de kromme te trekken en de tangens te nemen van de hoek, die deze raaklijn met de positieve horizontale as maakt. In het algemeen zal de richting van de raaklijn voor ieder punt verschillend zijn; in fig. 3 is dus $\frac{dI_a}{dV_a}$ afhankelijk van de waarde van V_a. Alleen als het verband tussen de beide grootheden door een rechte lijn wordt weergegeven zoals in fig. 1 het geval was, is het differentiaalquotiënt constant. Daar was

$\frac{\Delta I}{\Delta V}$ steeds gelijk aan tg φ, hoe groot of hoe klein men ΔV ook nam; dus daar was $\frac{\Delta I}{\Delta V} = \frac{dI}{dV}$.

Zoals in Deel 2, hfdst. IV wordt besproken, noemt men in fig. 3 $\frac{dI_a}{dV_a} = \text{tg } \varphi$ de steilheid van de karakteristiek.

Bij de inductiewet van Faraday (zie hfdst. IX) ontmoeten we ook

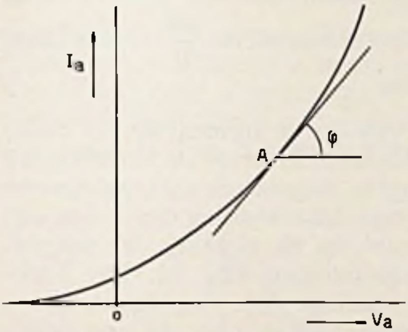


Fig. 3. I_a-V_a-karakteristiek van een diode. $\frac{dI_a}{dV_a} = \text{tg } \varphi$.

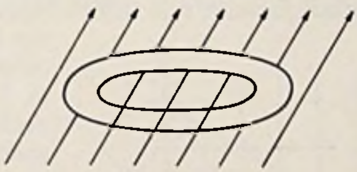


Fig. 4. Een gesloten winding in een magnetisch veld.

een differentiaalquotiënt. Daarom willen we thans reeds deze wet even beschouwen.

We denken ons een magnetisch veld, waarin zich een gesloten draadwinding bevindt (fig. 4). Van het magnetische veld kunnen we ons een beeld vormen door zg. magnetische inductielijnen te tekenen. Hoe sterker het magnetische veld, des te meer inductielijnen we tekenen. Een gedeelte dezer lijnen wordt door de winding omvat; een ander gedeelte niet. Zolang er niets verandert aan het magnetische veld of aan de stand en de vorm van de draad zal er in de draad geen electrische stroom lopen. Verandert echter het magnetische veld of beweegt men de draad, dan wordt in de draad een electrische spanning opgewekt, die een electrische stroom door de draad tot gevolg heeft. Faraday heeft dit verschijnsel bestudeerd en gevonden, dat de spanning, die in de draad ontstaat, afhangt van de snelheid, waarmee het aantal door de draad omvatte inductielijnen verandert. We noemen het aantal omvatte inductielijnen Φ. We onderstellen, dat in een (kort) tijdsverloop Δt dit aantal toeneemt met een bedrag $\Delta\Phi$. (Men denke bij Δt niet aan een product van Δ en t; evenals boven betekent Δt een zekere toename van t.) De verandering van Φ bij toename van t kan nu eens wat sneller, dan weer wat langzamer verlopen. $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ geeft een beeld van de snelheid, waarmee Φ toeneemt. Het is nl. de

gemiddelde waarde van deze snelheid in het tijdsverloop Δt. Gedurende het gehele (korte) tijdsverloop Δt zal deze snelheid in het algemeen niet constant zijn. Hoe korter het tijdje Δt, des te minder zal in den regel $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ gedurende dit tijdje Δt veranderen. Indien men Δt steeds kleiner neemt, zal $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ tot een bepaalde grenswaarde naderen; door Δt maar klein genoeg te nemen, zal men kunnen zorgen, dat $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ zo weinig van deze grenswaarde verschilt als men verkiest. Deze grenswaarde of limiet van het differentiequotiënt $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ duidt men weer aan door het differentiaalquotiënt $\frac{d\Phi}{dt}$.

Evenals bij de diodekarakteristiek van fig. 2 kunnen we dit differentiaalquotiënt ook in een figuur toelichten. Daartoe onderstellen we een homogeen magnetisch veld, waarin een cirkelvormige draadwinding draait om een as, loodrecht op de richting der magnetische inductielijnen (fig. 5). De hoeksnelheid, waarmee deze ring draait, zij ω, dat wil zeggen dat in 1 sec de ring draait over een hoek ω, gemeten in radialen (zie hfdst. I). We beginnen de tijd te tellen op het ogenblik, dat de ring horizontaal staat. Op de tijd t maakt de ring dus een hoek ωt met de horizontale richting. Het aantal omvatte inductielijnen is maximaal als $t = 0$, nl. Φ_{max}. Op de tijd t_1 is dit aantal gedaald tot $\Phi_{max} \cos \omega t_1$ (fig. 5). Een tijdje Δt later is dit aantal $\Phi_{max} \cos \omega (t_1 + \Delta t)$. De toename van Φ is in dit tijdje dus

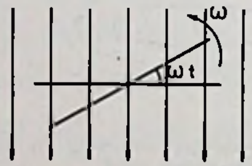


Fig. 5. Een gesloten winding, met een hoeksnelheid ω draaiend om een middellijn, loodrecht op de richting van het magnetische veld.

$$\Delta\Phi = \Phi_{max}\{\cos \omega (t_1 + \Delta t) - \cos \omega t_1\} =$$
$$= -2\,\Phi_{max} \sin \omega \left(t_1 + \frac{\Delta t}{2}\right) \sin \omega \frac{\Delta t}{2}.$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\,\omega\,\Phi_{max} \sin \omega \left(t_1 + \frac{\Delta t}{2}\right) \frac{\sin \frac{\omega \Delta t}{2}}{\frac{\omega \Delta t}{2}}. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Om de grenswaarde hiervan te vinden als Δt steeds kleiner wordt, maken we er gebruik van, dat $\frac{\sin x}{x}$ nadert tot 1 als x nadert tot nul [zie hfdst. I, form. (27)]. Stellen we $x = \frac{\omega \Delta t}{2}$, dan vinden we dus, door in (4) Δt tot nul te laten naderen, waardoor ook $\frac{\omega \Delta t}{2}$ tot nul nadert,

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\omega\,\Phi_{\max} \sin \omega\, t_1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Men ziet, dat de amplitude van $\frac{d\Phi}{dt}$ evenredig is met Φ_{max}, dit is de amplitude van Φ, en ook met ω, dit is de frequentie van Φ. De frequentie van $\frac{dt}{d\Phi}$ is natuurlijk dezelfde als die van Φ, doch de fase is anders. De waarde van $\frac{d\Phi}{dt}$ is voor iedere waarde van t, dus op ieder ogenblik, weer gelijk aan de tangens van de hoek φ, die de raaklijn in het desbetreffende punt maakt met de positieve horizontale as in fig. 6a. Van A tot C ligt $\angle\,\varphi$ tussen π en $^1/_2\,\pi$ (tussen 180° en 90°) en is tg φ dus negatief; tussen C en E is tg φ positief. Dit ziet men ook in fig. 6b. Voor de punten A, C en E loopt de raaklijn horizontaal, is dus $\angle\,\varphi = 0$ en

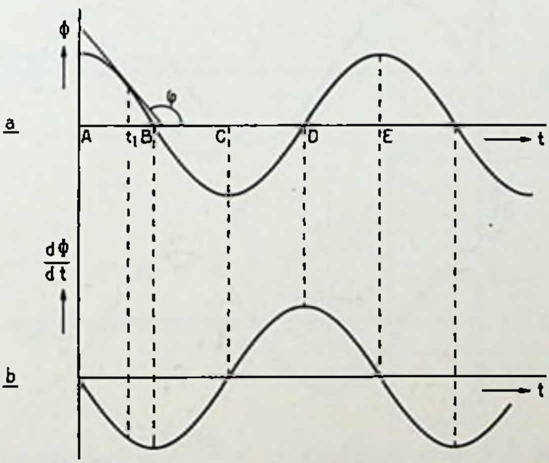


Fig. 6. a. De door de winding van fig. 5 omvatte magnetische flux $\Phi = \Phi_{max} \cos \omega\, t$ als functie van de tijd;
b. $\frac{d\Phi}{dt} = -\omega\,\Phi_{max} \sin \omega\, t$ als functie van de tijd.

ook tg $\varphi = 0$, dus ook $\frac{d\Phi}{dt} = 0$. Voor de punten B en D loopt de raaklijn het steilst, is dus tg φ het grootst, $\frac{d\Phi}{dt}$ dus ook. Dit ziet men duidelijk bij een aandachtige vergelijking van fig. 6a en 6b.

In de electriciteitsleer komen o.a. de volgende differentiaalquotiënten ter sprake:

$$\left.\begin{aligned}\Phi = \Phi_{\max} \sin \omega t \rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = \omega \Phi_{\max} \cos \omega t\,;\\ \Phi = \Phi_{\max} \cos \omega t \rightarrow \frac{d\Phi}{dt} = -\omega \Phi_{\max} \sin \omega t\,.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

De tweede hiervan hebben wij besproken; de eerste is geschetst in fig. 7. Na bovenstaande beschouwingen zal de lezer deze zelf kunnen afleiden.

We hebben gezien, dat, als y van x afhangt [we zeggen dan, dat y een *functie* is van x, hetgeen we aanduiden door $y = f(x)$] het differentiaalquotiënt is

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad \ldots. \quad (7)$$

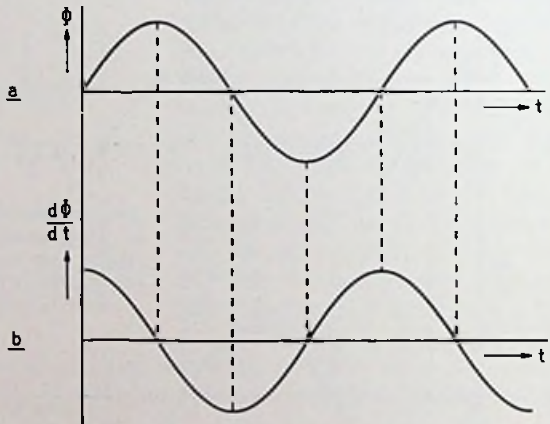


Fig. 7. a. $\Phi = \Phi_{\max} \sin \omega t$; b. $\frac{d\Phi}{dt} = \omega \Phi_{\max} \cos \omega t$.

In plaats van $\frac{dy}{dx}$ schrijft men ook wel, als het geen verwarring kan geven, kortheidshalve y'.

In de figuur, die y als functie van x voorstelt, is $\frac{dy}{dx}$ de tangens van de hoek, die de raaklijn maakt met de positieve x-as.

Het differentiaalquotiënt is weer een functie van x. We noemen $\frac{dy}{dx}$ als functie van x de *afgeleide* functie van y. Van deze afgeleide functie kan men weer de afgeleide nemen, die wordt aangeduid door $\frac{d^2y}{dx^2}$ (de 2 als „exponent" in de „teller" bij de d, in de „noemer" bij de x) en spreekt dit uit als „d tweede y dx kwadraat". Op deze wijze kan

men doorgaan en vindt dan $\frac{d^3y}{dx^3}$ („*d* derde *y* *dx* tot de derde"), $\frac{d^4y}{dx^4}$ enz.

We zullen nu voor enkele eenvoudige functies de afgeleide berekenen.

a. $y = f(x) = a =$ constant, onafhankelijk van x.

Ook $f(x + \Delta x) = a$, dus $\Delta y = 0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$, dus is ook

$$\frac{dy}{dx} = 0. \qquad \text{(8)}$$

De afgeleide van een constante is nul. We kunnen dit ook uit een figuur zien. In fig. 8 is de horizontale lijn AB de voorstelling van $y = a$. Om voor een bepaalde waarde van x het differentiaalquotiënt te vinden moeten we in het desbetreffende punt de raaklijn trekken. De raaklijn is de limietstand van de verbindingslijn van dit punt met een naburig

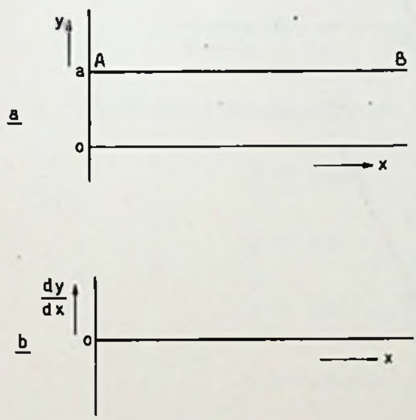


Fig. 8. a. $y = a$; b. $\frac{dy}{dx} = 0$.

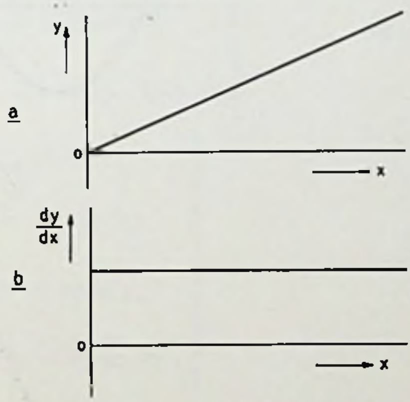


Fig. 9. a. $y = a\,x$; b. $\frac{dy}{dx} = a$.

punt. Doch bij een rechte lijn valt deze verbindingslijn samen met de gegeven lijn, de raaklijn dus ook. De hoek, die de raaklijn in ons geval maakt met de positieve x-as, is nul; de tangens van deze hoek eveneens, dus is $\frac{dy}{dx} = 0$. In fig. 8b valt $\frac{dy}{dx}$ als functie van x samen met de x-as.

b.

$$y = f(x) = a\,x.$$

$$f(x + \Delta x) = a\,(x + \Delta x).$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a\,(x + \Delta x) - a\,x}{\Delta x} = a.$$

Daar dit differentiequotiënt niet van x afhangt, is ook

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a. \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

Dit resultaat is aangegeven in fig. 9.

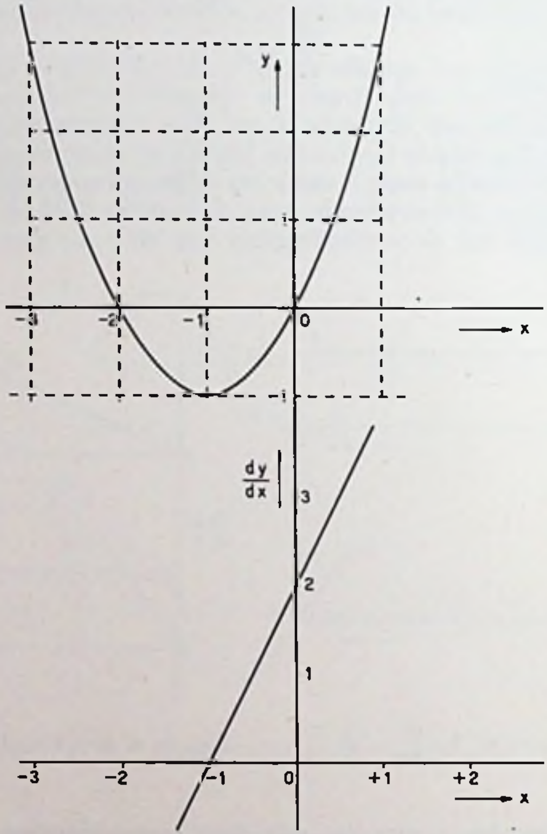


Fig. 10. a. $y = x^2 + 2x - 2$; b. $\frac{dy}{dx} = 2x + 2$.

c. $$y = f(x) = a x^2 + b x + c.$$

$$f(x + \Delta x) = a (x + \Delta x)^2 + b (x + \Delta x) + c.$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 2 a x + b + a \Delta x.$$

Laten we nu Δx naar nul gaan, dan blijven $2 a x$ en b onveranderd, en gaat $a \Delta x$ naar nul, dus

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b.$$

Fig. 10 geeft dit resultaat aan voor $a = 1$, $b = 2$ en $c = -2$.

d. $$y = f(x) = x^n.$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n = x^n + n x^{n-1} \Delta x +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1 \times 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots$$

Al de niet uitgeschreven termen bevatten hogere machten van Δx.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} x^{n-2} \Delta x + \ldots$$

Daar alle termen, behalve de eerste, Δx als factor bevatten, is

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = n x^{n-1}. \qquad (11)$$

e. We hebben reeds gezien:

$$\left.\begin{aligned} y &= \sin x, & \frac{dy}{dx} &= \cos x; \\ y &= \cos x, & \frac{dy}{dx} &= -\sin x; \\ y &= \sin a x, & \frac{dy}{dx} &= a \cos a x; \\ y &= \cos a x, & \frac{dy}{dx} &= -a \sin a x. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

f. Een functie, die we nog herhaaldelijk zullen ontmoeten, is $y = e^x$ (e is het grondtal van de natuurlijke logarithme). We leiden hier niet af, welke de afgeleide functie is, doch geven alleen het resultaat.

$$\left.\begin{aligned} y &= e^x, & \frac{dy}{dx} &= e^x; \\ y &= e^{-x}, & \frac{dy}{dx} &= -e^{-x}; \\ y &= e^{ax}, & \frac{dy}{dx} &= a e^{ax}; \\ y &= e^{-ax}, & \frac{dy}{dx} &= -a e^{-ax}. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

g. We vermelden hier nog enkele belangrijke regels, die bij het differentiëren toepassing vinden.

De afgeleide van een som of verschil is de som of het verschil van de afgeleiden der termen.

Voor de afgeleide van x^2 hebben we gevonden: $2x$; de afgeleide van sin x was cos x. De afgeleide van $x^2 + \sin x$ is dus $2x + \cos x$. Voor een *product* of *quotiënt* gelden andere regels, nl. als volgt.

$$y = y_1 \times y_2, \qquad \frac{dy}{dx} = y_1 \frac{dy_2}{dx} + y_2 \frac{dy_1}{dx}. \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

$$y = \frac{y_1}{y_2}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{y_2 \frac{dy_1}{dx} - y_1 \frac{dy_2}{dx}}{y_2^2}. \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

Een *constante factor* blijft als constante factor voor het differentiaalquotiënt:

$$\frac{d(ay)}{dx} = a \frac{dy}{dx}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

2. Partiële differentiaalquotiënten

In Deel 2, hfdst. IV beschouwen we de karakteristieken van een triode. De anodestroom I_a is daarbij afhankelijk van de roosterspanning V_g en van de anodespanning V_a. We schrijven dit als $I_a = f(V_g, V_a)$. De I_a-V_g-karakteristiek van een triode geeft het verband aan tussen de anodestroom en de roosterspanning, als daarbij de anodespanning constant wordt gehouden. Om de steilheid te vinden geven we de roosterspanning een kleine aangroeiing ΔV_g en meten de daardoor veroorzaakte toename ΔI_a van de anodestroom, terwijl de anodespanning dezelfde blijft. Het differentiequotiënt $\frac{\Delta I_a}{\Delta V_g}$ geeft nu een zekere gemiddelde waarde van de steilheid S van de I_a-V_g-karakteristiek in het gebiedje ΔV_g van de roosterspanning. Om de steilheid in een bepaald punt van de karakteristiek te vinden laten we ΔV_g naar nul gaan, waarbij ΔI_a eveneens nul wordt, doch het quotiënt $\frac{\Delta I_a}{\Delta V_g}$ naar een bepaalde limiet gaat. Daar I_a een functie is niet alleen van V_g, maar ook van V_a, duiden we $\lim\limits_{\Delta V_g \to 0} \frac{\Delta I_a}{\Delta V_g}$ niet aan door $\frac{dI_a}{dV_g}$, maar door $\frac{\partial I_a}{\partial V_g}$; dus:

$$S = \frac{\partial I_a}{\partial V_g}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

We noemen een dergelijk differentiaalquotiënt een *partieel* differentiaalquotiënt (een niet zeer gelukkig gekozen benaming).

Op overeenkomstige wijze kunnen we uit de I_a-V_a-karakteristiek

de limiet van het differentiequotiënt $\frac{\Delta I_a}{\Delta V_a}$ bepalen en vinden dan de reciproke waarde van de inwendige weerstand:

$$\frac{1}{R_i} = \frac{\partial I_a}{\partial V_a}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

waarbij V_g constant is ondersteld.

We kunnen ook de anodestroom constant houden en V_a als functie van V_g beschouwen. De versterkingsfactor g is dan

$$g = -\frac{\partial V_a}{\partial V_g}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

Bij een toename van de anodespanning moet de roosterspanning afnemen (meer negatief worden) om de anodestroom constant te houden. Vandaar het min-teken in de uitdrukking voor g.

Wanneer een grootheid z een functie is van twee andere grootheden, x en y, kan ook x worden opgevat als een functie van y en z en y als een functie van x en z. Men kan voor dit geval algemeen aantonen, dat

$$\frac{\partial x}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial z} \times \frac{\partial z}{\partial x} = -1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

Hieruit volgt voor een triode:

$$\frac{\partial I_a}{\partial V_g} \times \frac{\partial V_g}{\partial V_a} \times \frac{\partial V_a}{\partial I_a} = -1,$$

dus in verband met (17), (18) en (19):

$$S\, R_i = g. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

3. Integraalrekening

Van de integraalrekening vermelden we alleen, wat bij onze beschouwingen in de andere delen van dit werk ter sprake komt.

a. Onbepaalde integralen.

Integreren is de omgekeerde bewerking van differentiëren. Bij het differentiëren hebben we van een gegeven functie de afgeleide bepaald. Bij het integreren is de afgeleide functie gegeven en wordt gevraagd naar de oorspronkelijke functie, waarvan de gegeven functie de afgeleide is. Zo hebben we voor de afgeleide van x^2 gevonden: $2x$. De integraal van $2x$ is dus x^2. De hiervoor gebruikelijke schrijfwijze is

$$\int 2x\, dx = x^2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Vóór de gegeven functie zetten we het integraalteken $\int$ en er achter dx. De uitdrukking (22) zegt dus, dat de afgeleide van x^2 gelijk $2x$ is. Doch volledig is dit niet. We hebben gezien, dat de afgeleide van een constante nul is. De afgeleide van $x^2 + C$, waarbij

C een willekeurig constant, niet van x afhangend getal is, is dus eveneens $2x$. De volledige oplossing is dus

$$\int 2x \, dx = x^2 + C. \qquad (23)$$

De constante C noemen we de *integratieconstante*. Uit hetgeen we bij de differentiaalrekening hebben gezien, volgt nu o.a.

$$\left.\begin{aligned}
&\int dx = x + C;\\
&\int x\,dx = {}^1/_2\,x^2 + C;\\
&\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx;\\
&\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C;\\
&\int \{f_1(x) + f_2(x)\}\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx;\\
&\int \sin x\,dx = -\cos x + C;\\
&\int \cos x\,dx = \sin x + C;\\
&\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cos ax + C;\\
&\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C;\\
&\int e^x\,dx = e^x + C;\\
&\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax} + C.
\end{aligned}\right| \quad . \quad (24)$$

b. Bepaalde integralen

We hebben in het voorgaande het integreren beschouwd als de omgekeerde bewerking van het differentiëren. We kunnen echter ook een geheel andere, meer zelfstandige definitie geven van een integraal.

In fig. 11 is op een rechthoekig assenkruis een kromme getekend, die de voorstelling is van een zekere functie van x: $y = f(x)$. We vragen nu naar het oppervlak van de figuur, begrensd door de x-as, de beide verticale lijnen door $x = a$ en $x = b$ en de kromme $y = f(x)$. Van een rechthoek weten we, hoe groot het oppervlak is, nl. lengte maal breedte. Van een figuur, begrensd door horizontale en verticale lijnen, kan het oppervlak worden gevonden door deze figuur in rechthoeken te verdelen. Nu rijst de vraag, of iets dergelijks ook mogelijk is, als de figuur wordt begrensd door gebogen lijnen. Het zal blijken, dat dit met behulp van de integraalrekening kan geschieden.

We verdelen de figuur van fig. 11 door een aantal verticale lijnen in stroken. De breedte van deze stroken moge willekeurig zijn en behoeft niet voor alle stroken dezelfde te zijn. We begrenzen deze stroken aan de bovenzijde door horizontale lijntjes, zodanig, dat deze lijntjes gaan door het hoogste punt, dat de kromme $y = f(x)$ in

het desbetreffende strookje bereikt. Ieder strookje is een rechthoek, waarvan het oppervlak gelijk is aan het product van basis en hoogte. Het totale oppervlak van alle strookjes samen is wat groter dan het gevraagde oppervlak, begrensd door de kromme $y = f(x)$. Nu begrenzen we de strookjes aan de bovenzijde door horizontale lijntjes, die gaan door het laagste punt, dat de kromme in het desbetreffende strookje bereikt. Het totale oppervlak van de strookjes is nu iets kleiner dan het gevraagde oppervlak. Het verschil van het totale oppervlak der rechthoekige strookjes voor de beide gevallen is in fig. 11 door arcering aangegeven.

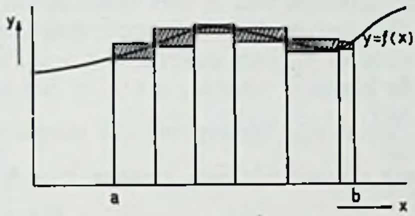


Fig. 11. Het oppervlak van de figuur, begrensd door de x-as, de verticale lijnen door $x = a$ en $x = b$ en $y = f(x)$, is $\int_a^b f(x)\,dx$.

We noemen de breedte van een bepaald strookje Δx, de hoogte van de rechthoek in het eerste geval y_1, in het tweede geval y_2. Het oppervlak van de rechthoek is in het eerste geval $y_1 \Delta x$, in het tweede geval $y_2 \Delta x$. Het oppervlak van het strookje, met als bovenste begrenzing de kromme $y = f(x)$, noemen we ΔO. Nu is

$$y_1 \Delta x > \Delta O > y_2 \Delta x.$$

Sommeren we dit voor alle strookjes, hetgeen we aanduiden door het sommeringsteken Σ (= de griekse hoofdletter sigma), en bedenken we, dat $\Sigma \Delta O = O$ (het gevraagde oppervlak), dan vinden we

$$\Sigma y_1 \Delta x > O > \Sigma y_2 \Delta x.$$

Maken we nu de verdeling fijner, door de stukjes Δx kleiner te nemen, dan wordt het oppervlak van ieder strookje kleiner, doch het aantal strookjes neemt toe. Het verschil tussen $\Sigma y_1 \Delta x$ en $\Sigma y_2 \Delta x$, d.i. het in fig. 11 gearceerde gedeelte, kunnen we zo klein maken als we willen door de verdeling maar fijn genoeg te nemen. Dus

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Sigma y_1 \Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \Sigma y_2 \Delta x = O.$$

In plaats van deze limietvormen schrijft men

$$O = \int_a^b y\,dx.$$

Het integraalteken $\int$ is een verbastering van de letter S, de eerste letter van het woord „som". Daar voor een bepaalde x de beide waarden y_1 en y_2 tot dezelfde limiet naderen, wordt eenvoudig y geschreven. In plaats van Δx wordt, voor het limietgeval, dx geschreven, evenals we bij de differentiaalrekening hebben gedaan. Om aan te

geven, tussen welke verticale begrenzende lijnen het oppervlak wordt genomen, worden de grenzen van x bij het integraalteken geplaatst: de ondergrens a onderaan, de bovengrens b bovenaan.

Nu rest nog de vraag, bij gegeven begrenzing $y = f(x)$ het oppervlak uit te rekenen. Daartoe onderstellen we eens de ondergrens a vast, doch de bovengrens b veranderlijk. Het oppervlak O is dan afhankelijk van b, dus een functie van b. Geven we b een aangroeiing Δb, dan neemt het oppervlak toe met een bedrag $\Delta O = \Delta b \times y_p$, waarbij y_p een waarde van y is, die ligt ergens tussen de grootste en de kleinste waarde, die y in het interval Δb aanneemt. Hieruit volgt $\frac{\Delta O}{\Delta b} = y_p$. Maken we Δb steeds kleiner, dan nadert y_p steeds meer tot de waarde van y voor $x = b$, dus bij de limiet is

$$\frac{dO}{db} = y_b = f(b)$$

[met $f(b)$ bedoelen we de waarde, die we krijgen, als we in $f(x)$ de letter x overal vervangen door b]. Bij de onbepaalde integralen hebben we gezien, dat hieruit volgt

$$O = \int f(b)\, db + C.$$

Voor $\int f(b)\, db$ schrijven we eenvoudig $F(b)$. Dus

$$O = F(b) + C.$$

Dit geldt voor iedere waarde van b, dus ook voor $b = a$. Doch als b met a samenvalt, is $O = 0$, dus is

$$0 = F(a) + C.$$

Aftrekking geeft nu

$$O = F(b) - F(a).$$

De integratieconstante C is hieruit verdwenen. Om dus het beschouwde oppervlak te berekenen, berekenen we de *bepaalde integraal* $\int_a^b f(x)\, dx$ door eerst de onbepaalde integraal $\int f(x)\, dx = F(x)$ uit te rekenen. In de verkregen uitkomst $F(x)$ substitueren we voor x de bovengrens b, zodat we $F(b)$ verkrijgen; daarna substitueren we de benedengrens a, waardoor we $F(a)$ verkrijgen. Ten slotte is

$$O = \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a). \qquad (25)$$

We zullen dit aan een paar voorbeelden toelichten.

1. $\int_0^a x\, dx.$

De functie $y = x$ is in fig. 12 voorgesteld door een rechte lijn door de oorsprong, die een hoek van 45° maakt met de positieve x-as. De

bepaalde integraal $\int_0^a x\,dx$ stelt het oppervlak voor, begrensd door deze lijn, de x-as en de verticale lijn door het punt $x = a$. $\int x\,dx = {}^1/_2\,x^2$ (de integratieconstante kunnen we weglaten, omdat deze toch wegvalt).

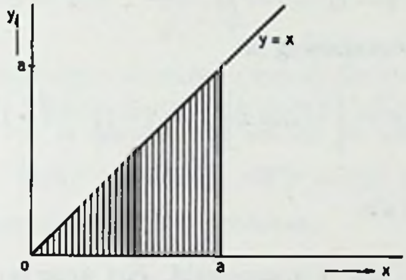


Fig. 12. Het oppervlak van de gearceerde driehoek is $\int_0^a x\,dx = {}^1/_2\,a^2$.

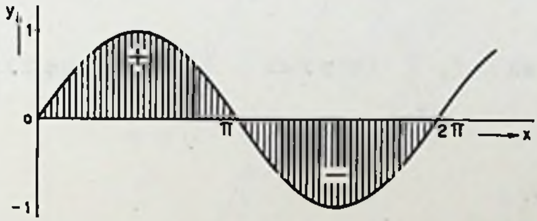


Fig. 13. $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$.

Voor $x = a$ wordt dit ${}^1/_2\,a^2$; voor $x = 0$ wordt dit 0, dus het oppervlak van de driehoek is ${}^1/_2\,a^2 - 0 = {}^1/_2\,a^2$. Dit resultaat was ons uit de meetkunde reeds bekend (het oppervlak van een driehoek is de helft van het product van basis en hoogte).

2. $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$.

De functie $y = \sin x$ is voorgesteld in fig. 13.

$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$ is het oppervlak, gelegen tussen de kromme $y = \sin x$ en de x-as, genomen tussen $x = 0$ en $x = 2\pi$. Van $x = 0$ tot $x = \pi$ is $\sin x$ positief; van $x = \pi$ tot $x = 2\pi$ negatief. Waar de functie, hier $\sin x$, negatief is, moeten we het oppervlak als een negatieve grootheid in rekening brengen. Daar het positieve oppervlak (van $x = 0$ tot $x = \pi$) even groot is als het negatieve (van $x = \pi$ tot $x = 2\pi$)

is het totale oppervlak dus nul. Dit blijkt ook, als we de integraal $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx$ volgens de aangegeven regels uitrekenen. We weten reeds, dat $\int \sin x\, dx = -\cos x$. $-\cos 2\pi = -1$; $-\cos 0 = -1$; $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx$ is dus $(-1)-(-1) = -1+1 = 0$. De gebruikelijke notatie voor deze berekening is

$$\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{2\pi} = (-1)-(-1) = 0.$$

3. $$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx.$$

In fig. 14 is $y = \sin^2 x$ voorgesteld. Het gearceerde oppervlak is

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} ({}^1/_2 - {}^1/_2 \cos 2x)\, dx =$$

$$= {}^1/_2 \int_0^{2\pi} dx - {}^1/_2 \int_0^{2\pi} \cos 2x\, dx = \Big[{}^1/_2 x - {}^1/_4 \sin 2x\Big]_0^{2\pi} =$$

$$= (\pi - 0) - (0 - 0) = \pi.$$

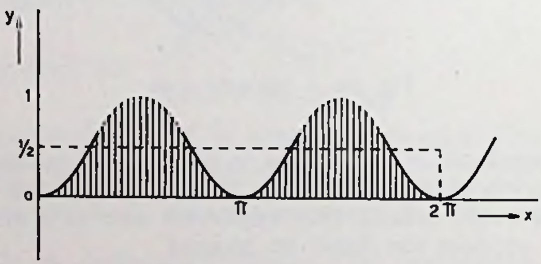


Fig. 14. Het oppervlak van de gearceerde figuur is $\int_0^{2\pi} \sin^2 x\, dx = {}^1/_2\, \pi$ en is gelijk aan het oppervlak van de door streeplijnen aangegeven rechthoek.

Het oppervlak van de figuur is dezelfde als die van een rechthoek met de basis 2π en de hoogte ${}^1/_2$. De gemiddelde waarde van $\sin^2 x$ over een geheel aantal perioden is dus ${}^1/_2$. Hetzelfde geldt voor $\cos^2 x$.

4. Differentiaalvergelijkingen

Onder een differentiaalvergelijking verstaan we een vergelijking, waarin een of meer differentiaalquotiënten voorkomen. Alleen de allereenvoudigste worden hier beschouwd.

$$\frac{dy}{dx} = a.$$

We zoeken een zodanige y als functie van x, dat aan deze vergelijking wordt voldaan. We vinden daarvoor $y = a\,x + C$.

Door de regels toe te passen, die we bij de differentiaalrekening hebben gevonden, blijkt inderdaad, als $y = a\,x + C$, dat $\frac{dy}{dx} = a$, evenals bij de integraalrekening is gebleken.

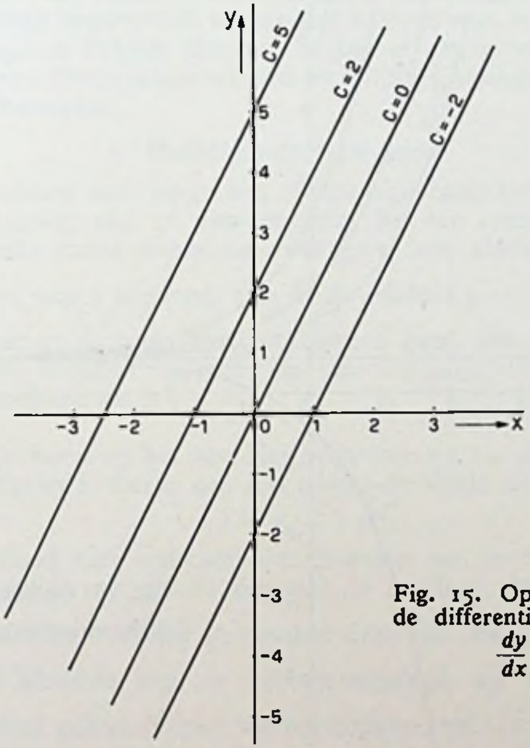


Fig. 15. Oplossingen van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = 2$.

$$\frac{dy}{dx} = 0; \qquad y = C. \qquad\qquad \frac{dy}{dx} + y = 0; \qquad y = C\,e^{-x}.$$

$$\frac{dy}{dx} = x^n; \qquad y = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C. \qquad\qquad \frac{dy}{dx} - y = 0; \qquad y = C\,e^{x}.$$

$$\frac{dy}{dx} + a\,y = 0;\ y = C\,e^{-a\,x}. \qquad \frac{dy}{dx} + a\,y = b;\ y = \frac{b}{a} + C\,e^{-a\,x}.$$

$$\frac{dy}{dx} - a\,y = 0;\ y = C\,e^{a\,x}. \qquad \frac{dy}{dx} - a\,y = b;\ y = -\frac{b}{a} + C\,e^{a\,x}.$$

De juistheid hiervan blijkt, door de gevonden waarde voor y te differentiëren en in de gegeven differentiaalvergelijking te substitueren.

We kunnen aan de integratieconstante C iedere willekeurige waarde geven. De grafische voorstelling van de oplossing van een differentiaalvergelijking is dus niet een enkele kromme, maar een stelsel krommen. De oplossing van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} = a$, nl. $y = a\,c + C$,

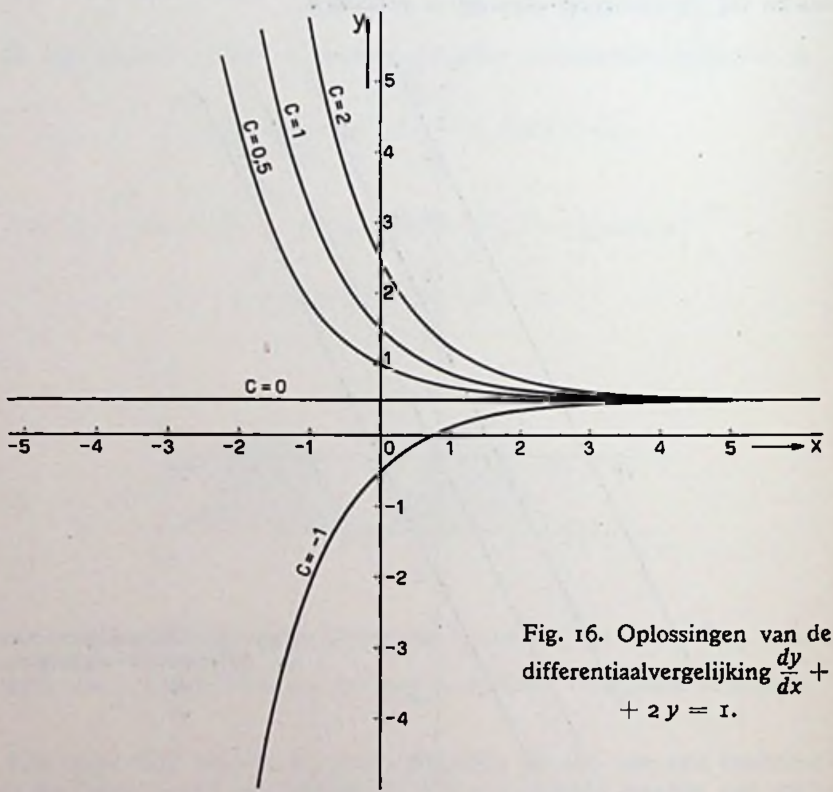


Fig. 16. Oplossingen van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} + 2\,y = 1$.

wordt voorgesteld door de verzameling van alle lijnen met de richtingscoëfficiënt a. In fig. 15 zijn enkele van deze lijnen getekend, waarbij $a = 2$ is genomen. In fig. 16 zijn enkele oplossingen van de differentiaalvergelijking $\frac{dy}{dx} + 2\,y = 1$, nl. $y = {}^1/_2 + C\,e^{-2\,x}$, voorgesteld.

VI. MECHANICA

A

DE BEWEGINGSLEER OF KINEMATICA

De kinematica of bewegingsleer houdt zich bezig met de beweging van lichamen zonder in te gaan op de oorzaken dezer beweging. We beschouwen hier alleen vaste lichamen en letten voorlopig niet op de afmetingen van het lichaam. We doen alsof het lichaam als een enkel punt kan worden beschouwd; we spreken dan van een „stoffelijk punt".

Het bewegende lichaam kan een rechte of een gebogen baan beschrijven. Eerst beschouwen we een rechtlijnige beweging; daarna de kromlijnige beweging.

1. Rechtlijnige beweging

Als een lichaam zich langs een rechtlijnige baan beweegt, kan de beweging eenparig zijn of niet-eenparig. Bij een *eenparige beweging* wordt in gelijke tijden steeds een even grote weg afgelegd. Wordt in een tijd t een weg s afgelegd, dan is de *snelheid* $v = \frac{s}{t}$. We meten de weg in meters (m), de tijd in secunden (sec), dus de snelheid v in meters per secunde (m/sec). Bij een eenparige beweging is de snelheid v constant en is

$$s = v\,t. \qquad (1)$$

Heeft het lichaam op het ogenblik, waarvoor we $t = 0$ stellen, reeds een weg s_0 afgelegd, dan is een tijd t later de totale afgelegde weg

$$s = s_0 + v\,t. \qquad (2)$$

Is de snelheid niet constant, dan noemen we de beweging *niet-eenparig*. Wordt in een tijd Δt een weg Δs afgelegd, dan noemen we $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ de gemiddelde snelheid gedurende deze tijd. Het lichaam zou in deze tijd Δt dezelfde weg Δs hebben afgelegd, als het steeds de snelheid $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ had gehad. Nemen we het tijdsinterval Δt steeds kleiner, dan nadert $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ tot een limiet. We noemen

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v, \qquad (3)$$

de snelheid van het lichaam op het beschouwde ogenblik.

Uit (1) volgt, dat ook voor de eenparige beweging $\frac{ds}{dt} = v$. Voor een niet-eenparige beweging is echter v niet constant, doch afhankelijk van t. In een tijd Δt neemt de snelheid toe met een bedrag Δv. Indien de snelheid toeneemt, is Δv een positieve grootheid; neemt de snelheid af, dan is Δv negatief. We noemen

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

de *versnelling* van het lichaam. Het is de toename van de snelheid per secunde. Is de versnelling a positief, dan noemen we de beweging *versneld*; is a negatief, dan noemen we de beweging *vertraagd*. Is de versnelling a constant, dat wil zeggen onafhankelijk van de tijd t, dan noemen we de beweging *eenparig versneld* of *eenparig vertraagd*.

Een lichaam, dat op het ogenblik, waarvoor we $t = 0$ stellen, in rust is en op dat ogenblik een eenparig versnelde beweging begint met een constante versnelling a, heeft na een tijd t een snelheid

$$v = a\,t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

[want uit (5) volgt: $\frac{dv}{dt} = a$] en heeft dan een weg s afgelegd, waarvoor $\frac{ds}{dt} = v = a\,t$. Dit is het geval, als

$$s = {}^1/_2\, a\, t^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

[zie hfdst. III, form. (10)].

Heeft het lichaam op het ogenblik $t = 0$ reeds een weg s_0 afgelegd en bezit het dan reeds een snelheid v_0 en vervolgt het de beweging eenparig versneld, dus met een constante versnelling a, dan is na een tijd t de snelheid

$$v = v_0 + a\,t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

en de afgelegde weg

$$s = s_0 + v_0\,t + {}^1/_2\, a\,t^2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Hiervan kan men zich overtuigen door uit (8) $v = \frac{ds}{dt}$ te berekenen, waarbij men (7) vindt, en door uit (7) $\frac{dv}{dt}$ te berekenen, waarbij men a vindt.

Een versnelling wordt gevonden door een snelheid te delen door een tijd en wordt dus uitgedrukt in m/sec². De afgelegde weg s, de snelheid v en de versnelling a bezitten niet alleen een grootte, maar ook een richting. Om aan te duiden, dat men niet alleen de grootte maar ook de richting in aanmerking neemt, plaatst men een pijl boven deze letters: $\vec{s}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$. Beschouwt men alleen de grootte, dan wordt de pijl weggelaten.

Vrije val

Een voorbeeld van een eenparig versnelde beweging is de beweging van een vrij vallend lichaam, indien de luchtweerstand geen rol speelt. Laat men in een lange luchtledige buis lichamen van verschillende vorm en verschillend gewicht vrij vallen, dan dalen ze alle even snel. Alle lichamen verkrijgen dus onder invloed van de zwaartekracht dezelfde versnelling. Deze wordt gewoonlijk door de letter g aangeduid. De grootte van g is afhankelijk van de geografische breedte; aan de aequator is $g =$ $= 9{,}78$ m/sec^2; op onze breedte is $g = 9{,}81$ m/sec^2. Bij berekeningen, waar niet de grootste nauwkeurigheid wordt vereist, kan gewoonlijk eenvoudigheidshalve $g = 10$ m/sec^2 worden gesteld.

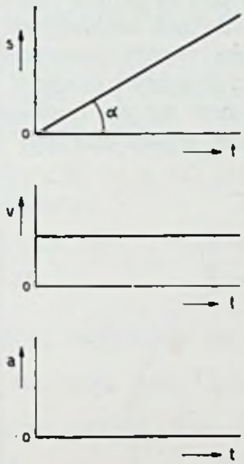


Fig. 1. De afgelegde weg s, de snelheid v en de versnelling $a = 0$ als functie van de tijd bij een eenparige rechtlijnige beweging.

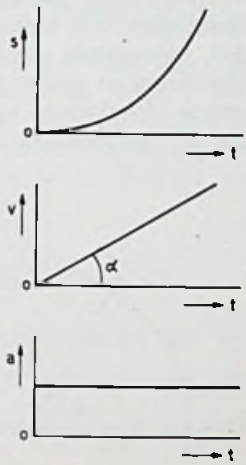


Fig. 2. De afgelegde weg s, de snelheid v en de versnelling a als functie van de tijd bij een eenparig versnelde rechtlijnige beweging.

Wordt een lichaam losgelaten 100 m boven het aardoppervlak, dan verkrijgt het een snelheid $v = g\,t$. De afgelegde weg is $s = {}^1/_2\, g\, t^2$. Op het ogenblik, dat het op de grond komt, is $s = 100$ m, dus ($g = 10$ m/sec^2 stellend) $100 =$ $= {}^1/_2 \times 10 \times t^2$, waaruit volgt: $t = 2\sqrt{5}$ sec. Het bereikt dus $2\sqrt{5}$ sec nadat het is losgelaten de grond. Zijn snelheid is dan $v = g\,t =$ $= 10 \times 2\sqrt{5} = 20\sqrt{5}$ m/sec.

Grafische voorstelling

In fig. 1 zijn voor een eenparige beweging de afgelegde weg s, de snelheid v en de versnelling a als functie van de tijd t aangegeven. De afgelegde weg neemt evenredig met de tijd toe en wordt dus voorgesteld door een rechte lijn door de oorsprong. De snelheid is constant, nl. $\frac{s}{t} = \operatorname{tg} \alpha$ en wordt voorgesteld door een horizontale lijn. De versnelling is nul en wordt voorgesteld door de horizontale as.

In fig. 2 zijn s, v en a voorgesteld als functie van t voor een eenparig versnelde beweging. De afgelegde weg $s = {}^1/_2\, a\, t^2$ wordt voorgesteld door een parabool, de snelheid $v = a\,t$ door een rechte lijn door de

oorsprong onder een hoek α, gegeven door tg $\alpha = a$, en de constante versnelling a door een horizontale lijn.

2. Eenparige cirkelbeweging

Bij een eenparige cirkelbeweging doorloopt een lichaam een cirkelvormige baan zodanig, dat in gelijke tijden gelijke cirkelbogen worden doorlopen. De straal, die het middelpunt van de cirkel verbindt met het bewegende lichaam, wordt *voerstraal* genoemd. Deze voerstraal doorloopt in gelijke tijden gelijke hoeken. De hoek, die in één secunde wordt doorlopen, noemen we de hoeksnelheid ω. Deze drukken we uit in radialen. In t sec wordt dus een hoek ωt doorlopen (fig. 3).

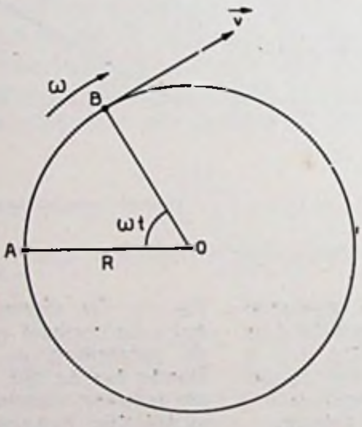


Fig. 3. Eenparige cirkelbeweging met hoeksnelheid ω. Voor $t = 0$ bevindt het lichaam zich in A. Na een tijd t heeft de voerstraal de hoek ωt doorlopen en heeft het lichaam de boog AB $= R\,\omega\,t$ afgelegd. De richting van de snelheid $\vec{v}$ is steeds volgens de raaklijn.

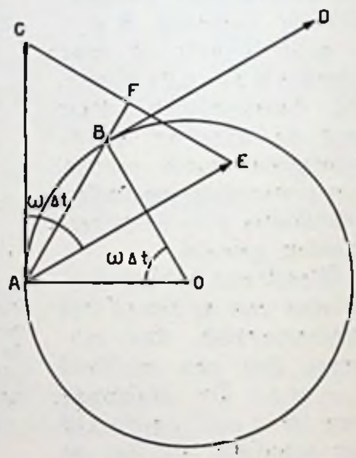


Fig. 4. Het bepalen van de centripetale versnelling bij een eenparige cirkelbeweging.

De lengte van de boog, die in 1 sec wordt doorlopen, is dan $R\,\omega$, als R de lengte van de straal is. De lengte van deze boog noemen we de snelheid v van het lichaam, dus

$$v = R\,\omega. \qquad (9)$$

De richting van de snelheid is echter op ieder ogenblik volgens de raaklijn aan de cirkel en verandert dus voortdurend.

De in een tijd t afgelegde weg is

$$s = v\,t = R\,\omega\,t. \qquad (10)$$

Daar de baan niet rechtlijnig is, verandert de snelheid voortdurend;

niet in grootte, maar in richting. Hieruit volgt, dat er een van nul verschillende versnelling is. Deze versnelling kunnen we bepalen met behulp van fig. 4. In een tijd Δt verplaatst het lichaam zich van A naar B. In het punt A is de snelheid $\overrightarrow{AC}$, in het punt B is deze $\overrightarrow{BD}$. AC = BD. We verplaatsen de snelheidsvector $\overrightarrow{BD}$ evenwijdig naar $\overrightarrow{AE}$. Bij $\overrightarrow{AC}$ moet $\overrightarrow{CE}$ worden opgeteld om $\overrightarrow{AE}$ te krijgen. De toename van de snelheid is dus $\overrightarrow{\Delta v} = \overrightarrow{CE}$. Daar AC $\perp$ OA en BD $\perp$ OB, dus ook AE $\perp$ OB, is $\angle$ EAC = $\angle$ BOA = $\omega\,\Delta t$. Daar AC een raaklijn aan de cirkel is, is $\angle$ CAB = $^1/_2$ boog AB = $^1/_2\,\omega\,\Delta t$, waaruit volgt, dat in de gelijkbenige driehoek EAC de lijn AF loodrecht staat op de basis EC. Hieruit volgt, dat CE = 2 AC sin $^1/_2$ $\omega\,\Delta t$, dus $\Delta v =$ $= 2\,v \sin {}^1/_2\,\omega\,\Delta t$. Nu is derhalve

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2\,v \sin {}^1/_2\,\omega\,\Delta t}{\Delta t} = \omega\,v\,\frac{\sin {}^1/_2\,\omega\,\Delta t}{{}^1/_2\,\omega\,\Delta t}.$$

Om de versnelling te vinden, moeten we de limiet nemen van $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ voor $\Delta t \to 0$. Als Δt naar nul gaat, gaat $^1/_2\,\omega\,\Delta t$ ook naar nul. In hfdst. I [form (27)] hebben we gezien, dat $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, dus de versnelling is

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \omega\,v\,\frac{\sin {}^1/_2\,\omega\,\Delta t}{{}^1/_2\,\omega\,\Delta t} = \omega\,v. \quad \ldots \; (11)$$

Volgens (9) is $v = R\,\omega$, dus

$$a = \omega\,v = R\,\omega^2 = \frac{v^2}{R}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (12)$$

Om de richting van de versnelling te vinden bedenken we, dat in fig. 4 CE $\perp$ AB. Bij de limiet gaat de richting van AB over in de richting van de raaklijn, dus gaat de richting van CE over in de richting van de straal van de cirkel. De versnelling a is dus gericht naar het middelpunt. We noemen deze versnelling de *centripetale* (d.i. middelpuntzoekende) versnelling.

Men kan aantonen, dat ook bij een niet-eenparige cirkelbeweging de centripetale versnelling door (12) wordt gegeven.

3. Samengestelde beweging

Bij een niet-rechtlijnige beweging kan men de weg s, de snelheid v en de versnelling a ontbinden in twee verschillende richtingen. Eenvoudigheidshalve nemen we hiervoor twee onderling loodrechte richtingen. We kunnen het dan beschouwen, alsof het lichaam gelijktijdig deelneemt aan twee verschillende rechtlijnige bewegingen. Dit willen we aan een voorbeeld toelichten.

We onderstellen, dat een steen in horizontale richting wordt weggeworpen op een hoogte h boven het aardoppervlak (fig. 5), met een beginsnelheid v_0 in horizontale richting. De steen behoudt in horizontale richting deze snelheid. In horizontale richting is dus de

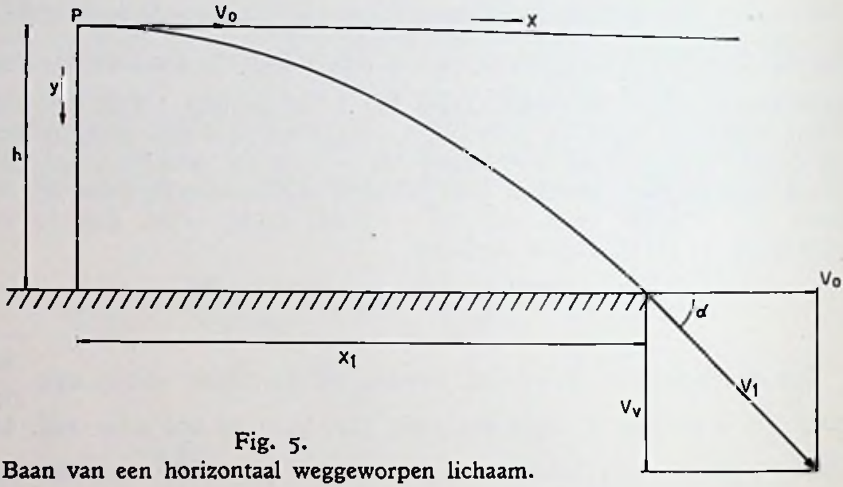


Fig. 5.
Baan van een horizontaal weggeworpen lichaam.

versnelling $a_h = 0$, de snelheid $v_h = v_0$ en de afgelegde weg $s_h = v_0 t$. Doch bovendien heeft de zwaartekracht een beweging in verticale richting tot gevolg, zoals we onder 1 hebben gezien. In deze richting is $a_v = g$, $v_v = g t$, $s_v = {}^1/_2 g t^2$. Noemen we de horizontale as door P de x-as, de verticale as de y-as, naar beneden positief gerekend, dan vinden we de baan door t te elimineren uit de beide vergelijkingen

$$x = s_h = v_0 t; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

$$y = s_v = {}^1/_2 g t^2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

Uit (13) volgt: $t = \frac{x}{v_0}$; dit gesubstitueerd in (14) geeft

$$y = \frac{g}{2 v_0^2} x^2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Dit is de vergelijking van een parabool. De steen bereikt de grond als $y = h$; dan is $h = \frac{g}{2 v_0^2} x_1^2$, dus

$$x_1 = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

De tijd, die hiervoor nodig is, is $t_1 = \frac{x_1}{v_0} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ sec. De eindsnelheid is in horizontale richting v_0 gebleven en in verticale richting

$g\,t_1$ geworden. De eindsnelheid in de richting van de baan is dus $v_1 = \sqrt{v_0^2 + g^2 t_1^2} = \sqrt{v_0^2 + 2\,h\,g}$ m/sec. De hoek α, waaronder de steen de aarde bereikt, is gegeven door tg $\alpha = \frac{v_v}{v_0} = \frac{g\,t_1}{v_0} = \frac{\sqrt{2\,h\,g}}{v_0}$.

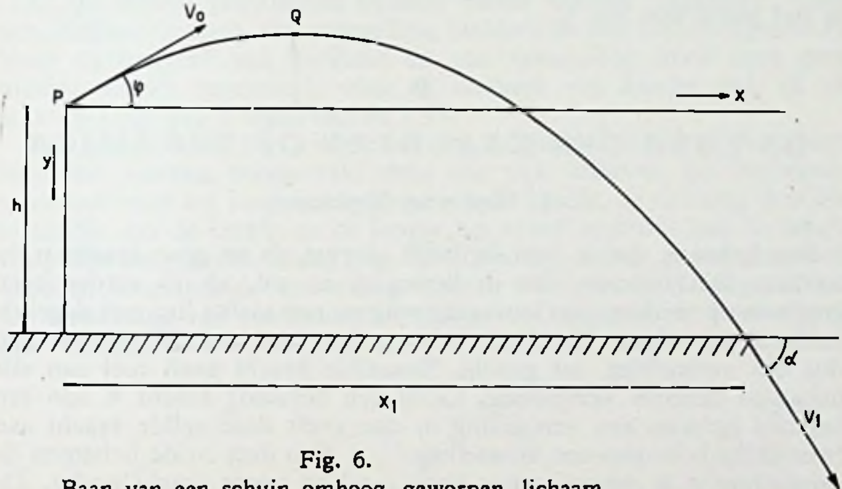


Fig. 6.
Baan van een schuin omhoog geworpen lichaam.

We beschouwen nu het geval, dat de steen schuin omhoog wordt weggeworpen (fig. 6) onder een hoek φ, met de beginsnelheid v_0. We nemen weer het punt P als oorsprong van ons assenstelsel. De component van de snelheid in horizontale richting is $v_0 \cos \varphi$ en blijft deze waarde behouden.

De component van de snelheid in verticale richting is in het begin $-\,v_0 \sin \varphi$ en wordt daarna $-\,v_0 \sin \varphi + g\,t$. De afgelegde weg is in horizontale richting $v_0\,t \cos \varphi$ en in verticale richting $-\,v_0\,t \sin \varphi + {}^1/_2\,g\,t^2$ [zie form. (8)]. In ons coördinatenstelsel wordt de baan dus aangegeven door

$$x = v_0\,t \cos \varphi; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

$$y = -\,v_0\,t \sin \varphi + {}^1/_2\,g\,t^2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

Uit (16) volgt: $t = \frac{x}{v_0 \cos \varphi}$. Dit gesubstitueerd in (17) geeft de vergelijking van de baan:

$$y = -\,x \operatorname{tg} \varphi + \frac{g}{2\,v_0^2 \cos^2 \varphi}\,x^2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

Ook dit is de vergelijking van een parabool. In het hoogste punt Q is de snelheid in verticale richting nul, dus $-\,v_0 \sin \varphi + g\,t = 0$, waaruit volgt: $t = \frac{v_0 \sin \varphi}{g}$. Voor dit punt Q is $x_Q = \frac{v_0^2}{2\,g} \sin 2\,\varphi$

en $y_Q = -\frac{v_0^2}{g}\sin^2\varphi + \frac{v_0^2\sin^2\varphi}{2g} = -\frac{v_0^2}{2g}\sin^2\varphi$. Als het lichaam de grond bereikt, is $y = h$, dus volgens (17): $h = -v_0\,t\sin\varphi + {}^1/_2\,g\,t^2$. Uit deze vierkantsvergelijking kan men t oplossen. Substitutie van de gevonden waarde voor t in (16) levert de afstand x_1. De snelheid v_1 en de hoek α kunnen worden gevonden op overeenkomstige wijze als in het geval van fig. 5.

B

DE LEER DER KRACHTEN OF DYNAMICA

1. Wet van Newton

Een lichaam, dat in rust is, blijft in rust als er geen krachten op werken. Een lichaam, dat in beweging is, zal, als er verder geen krachten op werken, zijn beweging volgens een rechte lijn met dezelfde snelheid vervolgen. Krachten hebben dus een snelheidsverandering, dus een versnelling, tot gevolg. Eenzelfde kracht geeft niet aan alle lichamen dezelfde versnelling. Geeft een bepaalde kracht K aan een bepaald lichaam een versnelling a, dan geeft deze zelfde kracht aan twee zulke lichamen een versnelling ${}^1/_2\,a$. Om deze beide lichamen de versnelling a te geven is een twee maal zo grote kracht nodig. De eigenschap der lichamen, die hier in het spel is, noemen we de massa m. We zouden de massa de hoeveelheid stof, de hoeveelheid materie kunnen noemen. Het genoemde verband tussen kracht, massa en versnelling kunnen we uitdrukken door de *wet van Newton*

$$K = m\,a \qquad (19)$$

(kracht = massa × versnelling). We drukken de versnelling uit in m/sec² (zie A.1). Als eenheid van massa nemen we 1 kilogram, dus de massa van het blokje platina, dat internationaal als „standaard-kilogram" is aanvaard en in Sèvres bij Parijs wordt bewaard. De eenheid van kracht is dan de kracht, die aan deze kilogram (of een ander lichaam met dezelfde massa) een versnelling geeft van 1 m/sec². Deze eenheid van kracht wordt een newton genoemd (afgekort N) naar de grondlegger der mechanica Isaac Newton (1643—1727). Een lichaam, dat vrij valt en door de aarde wordt aangetrokken, verkrijgt op onze geografische breedte een versnelling van ongeveer 9,81 m/sec². Een vrij vallend lichaam met de massa $m = 1$ (dus 1 kg) verkrijgt onder invloed van de aantrekkingskracht der aarde dus ook een versnelling $a = 9{,}81$ m/sec². Volgens (19) is dus de kracht, die de aarde uitoefent op 1 kg, $m\,a = 1 \times 9{,}81 = 9{,}81$ eenheden van kracht, dus 9,81 newton. Hieruit volgt, dat 1 newton de kracht is, waarmee de aarde een massa (dus een gewicht) van ongeveer $\frac{1}{9{,}81} = 0{,}102$ kg aantrekt.

We hebben tot nu toe de volgende grondeenheden leren kennen, waarmee we de mechanische grootheden meten.

Eenheid van tijd	— 1 secunde (sec);
eenheid van lengte	— 1 meter (m);
eenheid van massa	— 1 kilogram (kg).

Al de andere grootheden kunnen hierin worden uitgedrukt, zoals een snelheid (m/sec), een versnelling (m/sec^2) en een kracht (kgm/sec^2). Voor de eenheid van snelheid en van versnelling heeft men geen nieuwe namen ingevoerd; voor de eenheid van kracht wel, nl. de newton (N), dus 1 kgm/sec^2 = 1 N.

Een kracht heeft een grootte en een richting. Een dergelijke grootheid kan worden voorgesteld door een pijl, waarvan het beginpunt samenvalt met het aangrijpingspunt van de kracht, de richting dezelfde is als die van de kracht en de lengte het aantal newtons van de kracht is op een aangegeven schaal (fig. 7). Zo'n pijl wordt *vector* genoemd. De lijn, waarlangs de vector is getekend, wordt de werklijn genoemd. De uitwerking van een kracht verandert niet, wanneer de kracht langs zijn werklijn wordt verschoven.

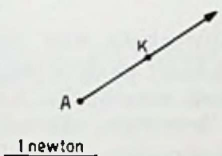


Fig. 7. Voorstelling van een kracht K van 2 N met aangrijpingspunt A door een vector.

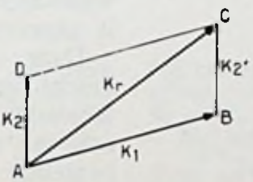


Fig. 8. Parallelogram van krachten.

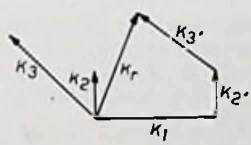


Fig. 9. $K_r = K_1 + K_2 + K_3$.

2. Samenstellen en ontbinden van krachten

Werken op een lichaam enige krachten met hetzelfde aangrijpingspunt, dan is de uitwerking van deze krachten tezamen dezelfde als die van de resultante der krachten. De resultante van twee krachten K_1 en K_2 (fig. 8) wordt verkregen door het parallelogram ABCD te construeren (parallelogram van krachten). De resultante K_r wordt dan voorgesteld door de vector AC. Men kan deze resultante ook verkrijgen door de kracht K_2 evenwijdig aan zichzelf te verplaatsen, zodat zijn beginpunt samenvalt met het eindpunt B van K_1. Het beginpunt van de resultante valt dan samen met het beginpunt van K_1, het eindpunt met het eindpunt van de verplaatste vector K_2'. De resultante van meer krachten wordt op overeenkomstige wijze verkregen (fig. 9). Ook als de krachten niet in één vlak zijn gelegen, kan de resultante op dezelfde wijze worden verkregen.

Werken twee krachten in dezelfde richting, dan is de grootte van

de resultante gelijk aan de som van de grootten der componenten. Werken twee krachten in tegengestelde richting, dan is de grootte van de resultante gelijk aan het verschil van de grootten der componenten. Vormen de werklijnen der componenten een hoek met elkaar, dan is de grootte van de resultante kleiner dan de som, doch groter dan het verschil van de grootten der componenten. Zijn de componenten tegengesteld gericht, doch gelijk van grootte, dan is de resultante nul.

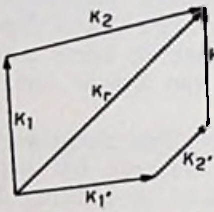


Fig. 10. Ontbinding van een kracht K_r in twee componenten K_1 en K_2 of in drie componenten K_1', K_2', en K_3'.

Men kan een kracht ontbinden in twee of meer componenten (fig. 10). Deze ontbinding kan op oneindig vele manieren geschieden. Zo kan bv. een kracht worden ontbonden in twee componenten, waarvan de richtingen zijn gegeven. Ook kan de ontbinding geschieden in twee componenten, waarvan één in grootte en richting is gegeven.

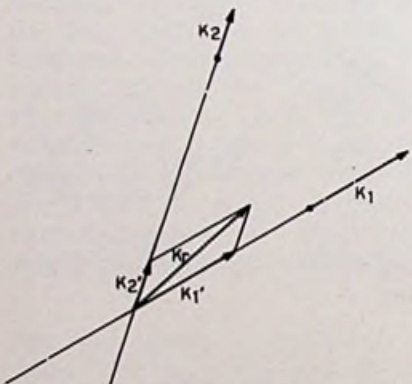


Fig. 11. Het bepalen van de resultante K_r van de krachten K_1 en K_2 door deze eerst langs hun werklijn te verschuiven tot zij een gemeenschappelijk aangrijpingspunt hebben verkregen.

Daar de uitwerking van een kracht dezelfde blijft als deze langs de werklijn wordt verschoven, kan ook van twee krachten, die niet hetzelfde aangrijpingspunt hebben, doch in eenzelfde vlak liggen, de resultante worden bepaald met behulp van het parallelogram door eerst de vectoren te verschuiven langs de werklijnen, zodat hun aangrijpingspunten samenvallen met het snijpunt der werklijnen (fig. 11).

Wanneer de werklijnen van twee krachten evenwijdig zijn, kan de resultante niet op de aangegeven wijze worden bepaald. In dat geval gaat men als volgt te werk. Zijn de krachten gelijk gericht (fig. 12), dan is de grootte van de resultante K_r gelijk aan de som van de grootten der componenten K_1 en K_2. Om het aangrijpingspunt van de resultante te vinden trekken we de lijn AB (deze behoeft niet loodrecht op de werklijnen te staan) en bepaalt hierop het punt C zodanig, dat $\frac{AC}{BC} = \frac{K_2}{K_1}$.

Zijn de krachten tegengesteld gericht (fig. 13), dan is de grootte van de resultante K_r gelijk aan het verschil van de grootten der componenten

K_1 en K_2. Het aangrijpingspunt C ligt dan buiten AB, aan de zijde van de grootste der twee krachten, zodanig, dat, als $K_1 > K_2$, $\frac{AC}{BC} = \frac{K_2}{K_1}$.

Zijn de krachten tegengesteld gericht en gelijk in grootte (fig. 14),

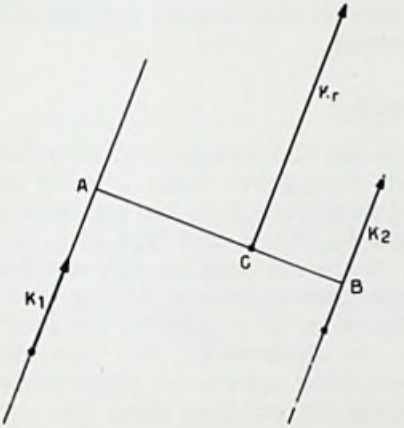


Fig. 12. De resultante K_r van twee evenwijdige, gelijk gerichte krachten K_1 en K_2. De grootte van K_3 is $K_1 + K_2$; het aangrijpingspunt C ligt zodanig op de lijn AB, dat $\frac{AC}{BC} = \frac{K_2}{K_1}$.

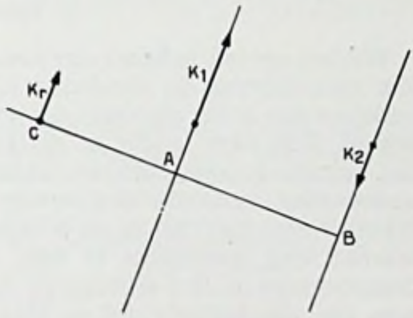


Fig. 13. De resultante K_r van twee evenwijdige, tegengesteld gerichte krachten K_1 en K_2. De grootte van K_r is $K_1 + - K_2$; het aangrijpingspunt C ligt zodanig op de lijn AB, dat $\frac{AC}{BC} = \frac{K_2}{K_1}$.

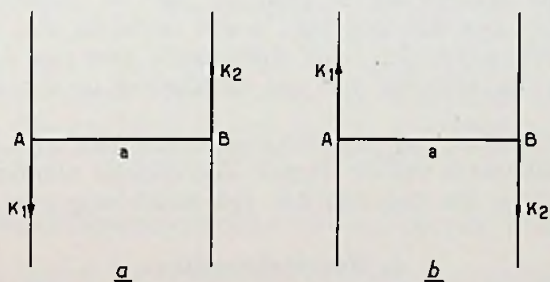


Fig. 14. Koppel, gevormd door de gelijke, evenwijdige, tegengesteld gerichte krachten K_1 en K_2 en de koppelarm AB met de lengte a. Het moment M van het koppel is $a\ K_1$. a. linksdraaiend koppel; b. rechtsdraaiend koppel.

dan verschuift het aangrijpingspunt C van de resultante naar oneindig, terwijl de grootte van de resultante nul wordt. We zeggen dan, dat de beide krachten een *koppel* vormen. Het product van een der krachten en de afstand a van de werklijnen der krachten noemen we het moment $M = a\ K_1$ van het koppel. Het moment wordt dus uitgedrukt

in newtonmeter (Nm). Het in fig. 14a getekende koppel noemen we linksdraaiend, dat van fig. 14b rechtsdraaiend.

Twee koppels, waarvan de momenten gelijk zijn en draaiend in dezelfde zin, zijn gelijkwaardig. Werken een aantal koppels op een lichaam, dan is het resultaat hetzelfde als dat van een enkel koppel, waarvan het moment de algebraïsche som is van de momenten der afzonderlijke koppels, de momenten met de ene draaizin positief, die met de andere draaizin negatief genomen.

3. Evenwicht

Werken op een lichaam een aantal in één vlak gelegen krachten, dan kan men hiervan de resultante op de aangegeven wijze bepalen en verkrijgt dan in het algemeen één resulterende kracht en één resulterend koppel. Zijn deze kracht en dit koppel beide nul, dan zegt men, dat het lichaam in evenwicht is. In vele practische gevallen verdient het aanbeveling, eerst alle krachten te ontbinden in twee onderling loodrechte richtingen, nl. in de x-richting en in de y-richting. De voorwaarde voor evenwicht is dan, dat de algebraïsche som van alle componenten in de x-richting en de y-richting nul is en de algebraïsche som van alle koppels nul is. Men drukt dit wel kort aldus uit:

$$\Sigma K_x = 0, \quad \Sigma K_y = 0, \quad \Sigma M = 0. \qquad \text{(20)}$$

Onder het moment van een kracht ten opzichte van een punt verstaat men het product van de kracht en de loodrechte afstand van het punt tot de werklijn van de kracht. Evenals we bij koppels hebben gezien, kan ook hier het moment rechts- of linksdraaiend zijn. We nemen de ene draaizin als de positieve aan; de momenten met de andere draaizin zijn dan negatief. Is een stelsel in één vlak gelegen krachten in evenwicht, dan is de algebraïsche som van de momenten der krachten ten opzichte van een willekeurig in dat vlak gelegen punt nul.

In de voorwaarden (20) voor evenwicht kan men voor ΣM nemen de som der momenten van de koppels, doch ook de som der momenten van alle krachten ten opzichte van een willekeurig punt.

4. Reactiekrachten

Indien een lichaam met een massa m rust op een horizontaal vlak, ondervindt dit een aantrekkende kracht $K_1 = m\,g$ van de aarde (fig. 15). Het ondersteunende vlak oefent hierbij op het lichaam een even grote, tegengesteld gerichte kracht K_2 uit, waardoor aan de evenwichtsvoorwaarde is voldaan. Wordt op het lichaam bovendien een uitwendige, verticaal naar beneden gerichte kracht K_3 uitgeoefend, dan wordt de reactiekracht K_2 hierdoor vergroot, totdat $K_2 = K_1 + K_3$.

Om het lichaam een horizontale beweging te geven is een horizontale kracht K_h nodig, die een bepaalde waarde K_w moet overschrijden. Is

deze horizontale kracht K_h kleiner dan K_w, dan blijft het lichaam in rust door de optredende wrijvingskracht. Deze wrijvingskracht is tegengesteld gericht aan de uitwendige kracht en stelt zich zo in, dat deze in grootte gelijk is aan de kracht K_h. Dan is $\Sigma K_x = 0$ en $\Sigma K_y = 0$ [vergelijk form. (20)] en is het lichaam in evenwicht. Wordt K_h groter

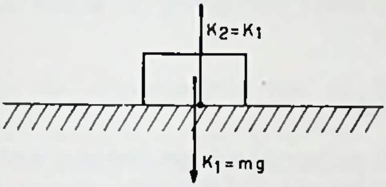


Fig. 15. Een lichaam, dat op een vlak rust, ondervindt van dit vlak een reactiekracht K_2, even groot als en tegengesteld gericht aan de kracht K_1, die het lichaam loodrecht op het vlak uitoefent.

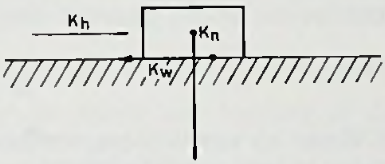


Fig. 16. Een lichaam, dat over een vlak wordt voortbewogen, ondervindt van dit vlak een wrijvingskracht K_w, tegengesteld gericht aan de richting van de beweging, en evenredig met de kracht K_n, die het lichaam loodrecht op het vlak uitoefent.

dan K_w, dan geraakt het lichaam in beweging. Het vlak, waar het lichaam op rust, oefent daarbij een kracht op het lichaam uit, gelijk aan K_w, onafhankelijk van de grootte van de kracht K_h (fig. 16). De resulterende kracht in horizontale richting is dan $K_h - K_w$. Het lichaam verkrijgt dus een versnelling $a = \frac{K_h - K_w}{m}$ in horizontale richting. In het algemeen is de maximale wrijvingskracht (die optreedt, wanneer het lichaam in beweging is) evenredig met de kracht K_n, die loodrecht op het vlak op het lichaam werkt; $K_w = f\,K_n$. De factor f heet de wrijvingscoëfficiënt. Deze hangt af van de aard van de over elkaar glijdende oppervlakken. Keert de uitwendige horizontale kracht K_h van richting om, dan geschiedt dit ook met de wrijvingskracht K_w; deze is altijd tegengesteld gericht aan de richting van de beweging.

5. Middelpuntzoekende of centripetale kracht

We hebben gezien, dat een lichaam, dat een cirkelbeweging uitvoert, een centripetale versnelling $a = \frac{v^2}{R} = R\,\omega^2$ heeft. Evenals iedere andere versnelling wordt deze versnelling veroorzaakt door een kracht, waarvan de grootte wordt bepaald door de wet van Newton: $K = m\,a$. Deze kracht, die de centripetale kracht wordt genoemd, is dus

$$K_c = \frac{m\,v^2}{R} = m\,R\,\omega^2 . \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (21)$$

Deze kracht is, evenals de versnelling, naar het middelpunt gericht.

Het is de kracht, die het lichaam in de cirkelvormige baan houdt. Heeft dus een lichaam een snelheid v en werkt er een kracht K op, steeds loodrecht op de richting van v, dan beschrijft het lichaam een cirkelvormige baan met een straal $R = \frac{m v^2}{K}$, zoals uit (21) volgt.

Ook indien de cirkelbeweging niet-eenparig is, dus als er, ten gevolge van tangentiële krachten ook een tangentiële versnelling is, wordt de centripetale kracht gegeven door (21).

6. Arbeid

Werkt op een lichaam een kracht K en verplaatst het lichaam zich onder invloed van deze kracht over een afstand s, zodat het aangrijpingspunt van de kracht K zich ook over deze afstand s verplaatst, dan noemen we het product

$$A = K s \quad \text{(22)}$$

de arbeid of de energie, die door de kracht K is geleverd en die door het lichaam is ontvangen. Valt de richting van de kracht niet samen met de richting van de beweging (fig. 17), doch vormen deze richtingen een hoek α, dan is de arbeid het product van de component van de kracht in de richting van de beweging en de afgelegde weg s, dus is

$$A = K s \cos \alpha. \quad \text{(23)}$$

De component $K \sin \alpha$, loodrecht op de richting van de beweging, verricht geen arbeid. Is de richting van de beweging tegengesteld gericht aan de component van de kracht in de richting der beweging, dan is α groter dan 90°, dus $\cos \alpha$ negatief, en A dus ook. Dan heeft het lichaam negatieve arbeid ontvangen, dat wil zeggen heeft arbeid geleverd en heeft de kracht negatieve arbeid geleverd, dus de bron van de kracht arbeid ontvangen. In form. (23) komt de tijd niet voor; de arbeid is dus onafhankelijk van de snelheid, waarmee de weg s wordt afgelegd.

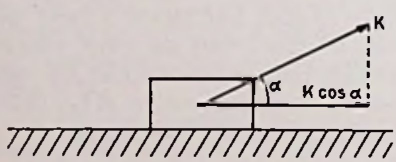


Fig. 17. Indien een kracht K een hoek α maakt met de afgelegde weg s is de door de kracht geleverde arbeid $K s \cos \alpha$.

In de natuur blijft de hoeveelheid arbeid constant. Wel kan de arbeid of energie in andere vormen van energie worden omgezet. We beschouwen in dit hoofdstuk alleen mechanische energie. Andere vormen van energie zijn: warmte, licht, geluid, electrische energie, scheikundige energie enz. De natuurwet, dat geen energie kan verloren gaan of uit niets ontstaan, heet de *wet van behoud van energie* (hieruit volgt de onmogelijkheid van een perpetuum mobile van de 1e soort, waarmee bedoeld wordt een instrument, dat zonder ophouden arbeid

kan leveren, zonder dat er een of andere vorm van arbeid aan wordt toegevoerd).

Nu rijst de vraag, waar de energie blijft, die bv. in het geval van fig. 16 door de kracht K_h wordt geleverd. We onderstellen de over elkaar glijdende vlakken zo glad, dat we van de wrijving kunnen afzien. Uit de formules (5) en (6) volgt, dat

$$s = \frac{v^2}{2a}, \qquad (24)$$

als de beginsnelheid nul is. Nu is $A = K s = m a \dfrac{v^2}{2a} = {}^1/_2\, m v^2$.

We noemen nu de grootheid ${}^1/_2\, m v^2$ de *arbeid van beweging* of de *kinetische energie,* die het lichaam heeft verkregen. De door de kracht K geleverde arbeid $K s$ is dus omgezet in de kinetische energie ${}^1/_2\, m v^2$. Had het lichaam op het ogenblik, dat de kracht K begon te werken, reeds een snelheid v_0, dan volgt uit (7) en (8), door t te elimineren, $s = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2a}$ en is $A = K s = m a \dfrac{v^2 - v_0^2}{2a} = {}^1/_2\, m v^2 - {}^1/_2\, m v_0^2$.

Op het ogenblik, dat de kracht K begon te werken, bezat het lichaam reeds een kinetische energie ${}^1/_2\, m v_0^2$; uiteindelijk bezit het een kinetische energie ${}^1/_2\, m v^2$; door de kracht K is dus het verschil hiervan geleverd.

We beschouwen nu een vrij vallend lichaam, met massa m (fig. 18). Alvorens het lichaam te kunnen laten vallen moeten we het eerst over een afstand h omhoog brengen. Hiertoe moeten we een kracht $K = m g$ aanwenden, even groot en tegengesteld gericht aan de kracht, waarmede de aarde het lichaam aantrekt. De door ons verrichte arbeid is hierbij $K h$. Deze arbeid is niet zoals in het vorige geval omgezet in kinetische energie, want als het lichaam boven is aangekomen, is het in rust. We zeggen nu, dat het lichaam *arbeid van plaats* of *potentiële energie* bezit ter grootte $K h = m g h$. Laten we het nu los, dan valt het met een eenparig versnelde beweging naar de aarde terug. Op het ogenblik, dat het de grond bereikt, heeft het een weg $s = h$ afgelegd en is volgens (24) $h = \dfrac{v^2}{2g}$, dus $v^2 = 2 g h$. De kinetische energie, die het dan heeft verkregen, is ${}^1/_2\, m v^2 = {}^1/_2\, m \times 2 g h = m g h$. De potentiële energie, die het lichaam bij het begin van de val bezat, is dus gelijk aan de kinetische energie, die het bij het eind van de val bezit. De potentiële energie is daarbij nul geworden. De potentiële energie is dus geheel omgezet in kinetische energie. Bij het bereiken van de grond wordt de kinetische energie omgezet in warmte.

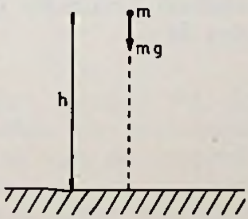


Fig. 18.
Vrij vallend lichaam.

De arbeid is het product van een kracht en een lengte en wordt dus uitgedrukt in newtonmeter (Nm), ook joule (J) genoemd (1 Nm = 1 J).

7. Vermogen

Onder het vermogen verstaan we de per secunde verrichte arbeid. 1 Nm/sec = 1 watt (1 W). Bij grote vermogens neemt men gewoonlijk de eenheid, die duizend maal zo groot is; dan verkrijgt men getallen, die duizend maal zo klein zijn. 1000 watt = 1 kilowatt (1000 W = 1 kW). De energie is het vermogen, vermenigvuldigd met de tijd, gedurende welke het vermogen is geleverd. Deze kan dus worden uitgedrukt in wattsecunden (Wsec) of, wat hetzelfde is, in joules (J); grote energieën drukt men gewoonlijk uit in kilowatturen (kWh); 1 kWh = 1000 × 3600 J (de letter h in kWh is een afkorting van het Engelse woord hour = uur).

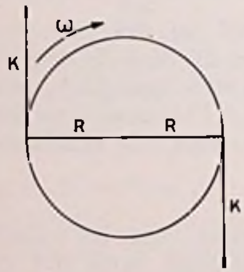


Fig. 19. Schijf, waarop een koppel met een moment $2\,K\,R$ werkt. Het vermogen, door het koppel geleverd, is $M\,\omega$.

We hebben bij een cirkelbeweging voor de snelheid gevonden $v = R\,\omega$ [verg. (9)]. Bij een eenparige cirkelbeweging wordt in een tijd t dus een weg $s = R\,\omega\,t$ afgelegd [verg. (10)]. Werkt op een lichaam, dat deze beweging heeft, een kracht K, gericht volgens de raaklijn aan de cirkel, dan is de arbeid, die deze kracht in een tijd t levert, $K\,s = K\,R\,\omega\,t$. Werkt op een lichaam een koppel, gevormd door twee gelijke, tegengesteld gerichte krachten (fig. 19), dus met een moment $M = 2\,K\,R$, dan is de arbeid, door dit koppel geleverd, de som der hoeveelheden arbeid, door ieder dezer beide krachten verricht, dus $2\,K\,R\,\omega\,t = M\,\omega\,t$. De per tijdseenheid (secunde) geleverde arbeid, d.i. het geleverde vermogen, is dus $M\,\omega$.

VII. WARMTE

1. Inleiding

We weten uit de ervaring, dat vrijwel alle stoffen bij verwarming uitzetten en bij afkoeling inkrimpen. Dit is het geval bij vaste stoffen en vloeistoffen, en bij gassen, indien de druk constant wordt gehouden. Wordt bij gassen het volume constant gehouden, dan neemt bij verwarming de druk toe en bij afkoeling de druk af. Bij voldoende verwarming worden vele vaste stoffen vloeibaar en worden vele vloeistoffen gasvormig; bij afkoeling vindt het omgekeerde plaats. Verder zijn er vele stoffen, waarbij bij verwarming een scheikundige verandering plaats vindt, bv. bij het verbranden van hout. Ook zijn er stoffen, die bij voldoende verhoging van de temperatuur lichtgevend worden, zoals de gloeidraad in een electrische gloeilamp.

De warmtetoestand van een lichaam noemen we zijn temperatuur. Brengen we twee lichamen met een verschillende temperatuur met elkaar in aanraking, dan daalt de temperatuur van het lichaam met de hoogste temperatuur en stijgt de temperatuur van het andere lichaam, tot beide dezelfde temperatuur hebben verkregen.

2. Thermometers

Evenals alle andere natuurkundige grootheden wensen we de temperatuur der lichamen te meten. Hierbij maken we gewoonlijk gebruik van de volumeverandering bij verandering van de temperatuur. Het instrument, waarmee we de temperatuur meten, heet thermometer. De meest gebruikte is de kwikthermometer. Een dunwandig glazen bolletje is voorzien van een nauwe glazen buis, die overal nauwkeurig even wijd is. Het bolletje en een gedeelte van de buis zijn gevuld met kwik. Door de cilindrische vorm van het buisje werkt dit als „vergrootglas", waardoor de kwikdraad veel dikker lijkt dan deze is en dus beter is te zien. Nadat de lucht uit de buis is verwijderd, is de buis aan de bovenzijde dichtgesmolten. We plaatsen vervolgens het bolletje in smeltend ijs. Het is gebleken, dat ijs steeds bij dezelfde temperatuur smelt; deze temperatuur noemen we het vriespunt; het kwik in onze thermometer neemt dus deze bepaalde temperatuur aan. Het volume van het kwik is door deze afkoeling kleiner geworden; het niveau van het kwik in het buisje is gedaald. Bij het punt, waar het kwik nu staat, plaatsen we het nulpunt.

Vervolgens brengen we het bolletje in de damp van kokend water. Het is gebleken, dat ook de damp onmiddellijk boven kokend water een constante temperatuur heeft. Deze temperatuur noemen we het kookpunt. Het kwik stijgt in het buisje tot een bepaald punt, waarbij we het cijfer 100 plaatsen. De afstand van 0 tot 100 verdelen we in 100 gelijke delen. Deze verdeling kunnen we beneden 0 en boven 100 voortzetten. Op deze wijze hebben we de thermometerschaal volgens Celsius (Zweeds natuurkundige, 1701—1744) verkregen. Plaatsen we de thermometer in een kamer en komt het niveau van het kwik bv. tot 20 op de schaal, dan zeggen we, dat de temperatuur in de kamer 20 graden Celsius is (20 °C).

Vroeger werden ook wel de thermometerschalen van Fahrenheit en van Réaumur gebruikt. Fahrenheit plaatste bij het vriespunt 32° en bij het kookpunt 212°; Réaumur plaatste bij het vriespunt 0° en bij het kookpunt 80°.

Een bijzondere uitvoeringsvorm van de kwikthermometer is de bekende koortsthermometer, die dient om de temperatuur van het menselijk lichaam te bepalen. Daar deze temperatuur slechts weinig varieert, treft men op deze thermometer slechts een schaalverdeling aan van 35 °C tot 42 °C. In dit gebied wenst men de temperatuur echter zeer nauwkeurig te kennen. Door het volume van het kwikreservoir groot te nemen en de opening in het buisje zeer nauw kan gemakkelijk tot op 0,1 °C nauwkeurig worden afgelezen. Onderaan bezit het buisje een vernauwing, waardoor het kwik bij verwarming wel normaal omhoog gaat, doch bij afkoeling niet vanzelf terugvloeit. Het is dus een maximumthermometer.

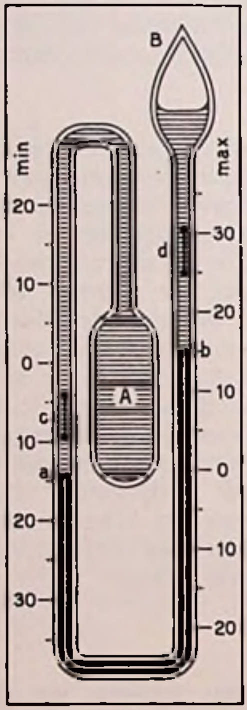


Fig. 1.
Maximum- en minimumthermometer.

Een veel gebruikte maximum- en minimumthermometer is in fig. 1 geschetst. Het gearceerde gedeelte is gevuld met alcohol; de ruimte B bevat verdunde lucht; het onderste gedeelte van de buis, van a tot b, bevat kwik. Boven de kwikdraad bevinden zich ijzeren staafjes c en d, die nauw in de buis sluiten, zodat ze niet vanzelf terugvallen, doch de alcohol wel laten passeren. De alcohol doet hier dezelfde dienst als het kwik in de kwikthermometer. Met behulp van een magneet verplaatsen we de staafjes c en d zover tot ze op het kwikoppervlak rusten. Stijgt de temperatuur, dan zet de alcohol in het reservoir A uit, drijft de kwikdraad in het linker been naar beneden, in het rechter been naar boven. Daardoor stijgt het staafje d; de onderzijde

van dit staafje geeft dus de hoogste opgetreden temperatuur aan. Daalt de temperatuur, dan krimpt de alcohol in het reservoir A in en de lucht in het reservoir B drijft de kwikdraad links omhoog, waardoor het staafje c omhoog gaat. Dit staafje wijst dus de laagste opgetreden temperatuur aan. Het staafje d blijft hierbij op zijn plaats.

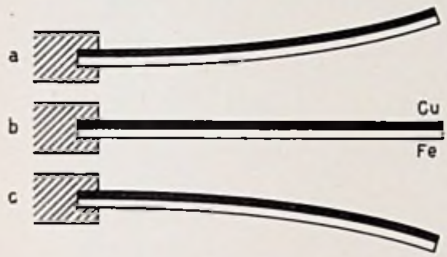


Fig. 2. Metaalthermometer; Cu. koperen staaf; Fe. ijzeren staaf.
a. bij lage temperatuur;
b. bij kamertemperatuur.
c. bij hoge temperatuur.

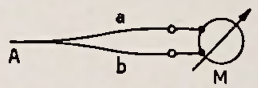


Fig. 3. Thermokoppel.
a. koperdraad;
b. constantaandraad;
A. soldeerplaats;
M. draaispoelmeter.

Een andere thermometer berust op het verschijnsel, dat de uitzetting voor verschillende metalen niet dezelfde is. Worden twee staven, de ene van koper, de andere van ijzer, aan elkaar verbonden (fig. 2), dan zal bij verhoging van de temperatuur het koper meer uitzetten dan het ijzer, wat tot gevolg heeft, dat de staaf een gebogen vorm krijgt. Bij afkoeling buigt de staaf naar de andere zijde door. Wordt de staaf aan één zijde ingeklemd, dan kan aan de andere zijde een overbrenging de beweging aan een wijzer mededelen.

Een thermometer, berustend op het thermo-electrisch effect, is in fig. 3 aangegeven. Worden twee draden a en b van verschillende metalen aan elkaar gesoldeerd, en wordt de verbindingsplaats A verwarmd, dan ontstaat er een spanning, die, als de keten wordt gesloten, een electrische stroom tot gevolg heeft. Wordt deze keten gesloten door een draaispoelinstrument M, dan is de uitslag van dit instrument een maat voor het temperatuurverschil tussen de soldeerplaats en de andere verbindingsplaats, dit is hier het meetinstrument (zie Deel 7b, hfdst. VII.N.2).

3. Uitzettingscoëfficiënt

Een staaf met de lengte l wordt in het algemeen bij iedere graad temperatuursverhoging bij benadering even veel langer, zodat de lengte bij een temperatuur van t °C kan worden voorgesteld door

$$l_t = l_0 \; (1 + \alpha t). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

We noemen α de lineaire uitzettingscoëfficiënt van het materiaal,

waarvan de staaf is vervaardigd. Voor verschillende materialen is α verschillend. Op overeenkomstige wijze is de relatieve vergroting van het volume v van een lichaam bij temperatuursverhoging γt. We noemen γ de kubieke uitzettingscoëfficiënt. Het volume v van een lichaam is evenredig met l^3, zodat het volume bij een temperatuur t is

$$v_t = v_0 (1 + \alpha t)^3 = v_0 (1 + 3 \alpha t + 3 \alpha^2 t^2 + \alpha^3 t^3).$$

Daar α zeer klein is, blijft practisch steeds $\alpha t << 1$, zodat met goede benadering

$$v_t = v_0 (1 + 3 \alpha t) = v_0 (1 + \gamma t), \quad \text{.........} \quad (2)$$

dus $\gamma = 3 \alpha$.

De kubieke uitzettingscoëfficiënt is dus driemaal de lineaire uitzettingscoëfficiënt.

Onderstaande tabel geeft voor enkele stoffen de lineaire uitzettingscoëfficiënt.

Koper	17×10^{-6}	ijzer	12×10^{-6}
zilver	19×10^{-6}	messing	19×10^{-6}
goud	15×10^{-6}	zink	29×10^{-6}
platina	9×10^{-6}	glas	9×10^{-6}

4. De wet van Boyle-Gay Lussac

De *wet van Boyle* (Engels natuurkundige, 1626—1691) zegt, dat de spanning van een afgesloten hoeveelheid gas omgekeerd evenredig is met het volume, mits de temperatuur van het gas dezelfde blijft.

De *wet van Gay Lussac* (Frans natuurkundige, 1778—1850) zegt, dat de uitzettingscoëfficiënt voor alle gassen $^1/_{273}$ is (nauwkeuriger: $^1/_{273,15}$; eenvoudigheidshalve schrijven we maar $^1/_{273}$), mits de druk dezelfde blijft.

We beschouwen een afgesloten hoeveelheid gas met een temperatuur van 0 °C, een volume v_0 en een druk p_0. We verwarmen het gas tot een temperatuur van t °C, terwijl we de druk constant houden. Het volume wordt dan $v_t = v_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right)$. Houden we echter bij deze verwarming het volume constant, dan wordt de druk $p_t = p_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right)$.

Voor twee verschillende temperaturen t_1 en t_2 is bij constante druk

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{1 + \frac{t_2}{273}}{1 + \frac{t_1}{273}} = \frac{273 + t_2}{273 + t_1}. \quad \text{.............} \quad (3)$$

Bij constant volume is

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \frac{t_2}{273}}{1 + \frac{t_1}{273}} = \frac{273 + t_2}{273 + t_1}. \quad \text{.............} \quad (4)$$

Men heeft een nieuwe temperatuurschaal ingevoerd, waarvan het nulpunt bij — 273 °C ligt (nauwkeuriger: — 273,15 °C) en waarbij iedere graad overeenkomt met 1 °C. De temperatuur volgens deze schaal noemt men de *absolute temperatuur* of het aantal *graden Kelvin* (°K) (naar Sir William Thomson, Engels natuurkundige, 1824—1907, die in 1892 de titel verkreeg van Lord Kelvin). Het is gebruikelijk, het aantal graden Celsius aan te duiden door t, het aantal graden Kelvin door T. 0 °K = — 273 °C; 273 °K = 0 °C. Uit theoretische overwegingen, door het experiment bevestigd, volgt, dat 0 °K de laagste bestaanbare temperatuur is.

Is de druk constant, dan is volgens (3)

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{T_2}{T_1}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

is het volume constant, dan is volgens (4)

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Volgens de wet van Boyle is bij constante temperatuur

$$p_1 v_1 = p_2 v_2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

De drie wetten (5), (6) en (7) kunnen worden samengevat in de *algemene gaswet*, ook wel de *wet van Boyle-Gay Lussac* genoemd:

$$\frac{p_1 v_1}{T_1} = \frac{p_2 v_2}{T_2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Daar de wetten van Boyle en Gay Lussac slechts benaderingen zijn van de waargenomen verschijnselen, is ook de formule (8) slechts een benadering. Een nauwkeuriger uitdrukking geeft de *wet van Van der Waals* (Nederlands natuurkundige, 1837—1923):

$$\frac{(p + \frac{a}{v^2})\ (v - b)}{T} = \text{constant}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

waarin a en b constanten zijn.

5. Hoeveelheid warmte; soortelijke warmte

Om 1 kg van een stof 1 °C in temperatuur te doen stijgen is een bepaalde hoeveelheid warmte nodig. Deze hoeveelheid warmte is voor verschillende stoffen verschillend. In hfdst. VI is reeds vermeld, dat warmte een vorm van energie is. Een hoeveelheid warmte drukken we dus uit in joules (= watt-secunden). Het aantal joules, nodig om 1 kg van een stof 1 °C in temperatuur te doen stijgen, gedeeld door het aantal joules, nodig om 1 kg water van 15 °C tot 16 °C te verwarmen, noemen we de *soortelijke warmte* (s.w.) van die stof. (Vroeger

drukte men een hoeveelheid warmte ook wel uit in calorieën. Een calorie was de hoeveelheid warmte, nodig om 1 kg water van 15 °C tot 16 °C te verwarmen. 1 calorie = 4167 joules. Onder de s.w. van een stof verstond men dan het aantal calorieën, nodig om 1 kg van die stof 1 °C in temperatuur te doen stijgen.)

Brengt men twee lichamen met verschillende temperatuur met elkaar in aanraking, dan zal het lichaam met de hoogste temperatuur een aantal joules afstaan aan het lichaam met de laagste temperatuur tot beide lichamen dezelfde eindtemperatuur hebben verkregen. Welke deze temperatuur zal zijn, hangt af van de s.w. der beide stoffen. Heeft men a_1 kg van de ene stof met de s.w. c_1 en a_2 kg van de tweede stof met de s.w. c_2 en zijn de temperaturen T_1 en T_2, terwijl de eindtemperatuur T_0 is, dan heeft het ene lichaam afgestaan $a_1 c_1 (T_1 - T_0)$ joules en het andere opgenomen $a_2 c_2 (T_0 - T_2)$ joules.

Uit $a_1 c_1 (T_1 - T_0) = a_2 c_2 (T_0 - T_2)$ volgt:

$$T_0 = \frac{a_1 c_1 T_1 + a_2 c_2 T_2}{a_1 c_1 + a_2 c_2}. \qquad (10)$$

Bij gassen onderscheidt men de soortelijke warmte bij constante druk c_p en de soortelijke warmte bij constant volume c_v. De verhouding dezer grootheden is voor alle gassen

$$\frac{c_p}{c_v} = 1{,}41. \qquad (11)$$

In onderstaande tabel is voor een aantal stoffen de soortelijke warmte aangegeven.

Stof	s.w.	Stof	s.w.	Stof	s.w.
water	1	ijzer	0,11	waterstof	3,4
ijs	0,50	koper	0,09	waterdamp	0,48
kwik	0,033	lood	0,03	lucht	0,24
alcohol	0,58	tin	0,054	koolzuur	0,22

6. Het overbrengen van warmte

De overbrenging van een hoeveelheid warmte van het ene lichaam naar het andere kan geschieden door *geleiding, stroming* en *straling.*

Onder de verschillende stoffen zijn goede en slechte *warmtegeleiders.* De slechte warmtegeleiders noemt men ook warmte-isolatoren. Goede geleiders zijn de metalen, zowel in vaste als in vloeibare toestand. Slechte geleiders zijn bv. glas en hout. Ook vloeistoffen zijn slechte warmtegeleiders, uitgezonderd de vloeibare metalen. Ook gassen geleiden de warmte slecht.

Denkt men twee punten in een lichaam op plaatsen met verschillende temperatuur door een rechte lijn verbonden en deze lijn in een aantal gelijke delen verdeeld, dan zijn de *verhoudingen* tussen de verschillen

in temperatuur in twee opvolgende punten constant. Wordt een staaf dus aan één uiteinde verwarmd en zijn de temperaturen in op gelijke afstanden gelegen punten opvolgend T_1, T_2, T_3, enz., dan is

$$\frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_3} = \frac{T_2 - T_3}{T_3 - T_4} = \frac{T_3 - T_4}{T_4 - T_5} = \text{enz.}$$

Overdracht van warmte door *stroming* (convectie) vindt plaats bij vloeistoffen en gassen. Daar de soortelijke massa van vloeistoffen en gassen in het algemeen bij verwarming afneemt, stijgt de warme vloeistof of het warme gas omhoog en daalt de koude naar beneden. Van dit verschijnsel wordt bv. bij centrale verwarming van gebouwen gebruik gemaakt. Water bezit de merkwaardige eigenschap, dat het bij 4 °C de grootste dichtheid bezit.

Een lichaam, dat een hoge temperatuur bezit, deelt warmte mee aan een ander lichaam met een lagere temperatuur, waarmee het niet in aanraking is, doch bv. door de lucht er van is gescheiden, zonder de middenstof (de lucht) eerst te verwarmen. Hierbij wordt de warmte door *straling* overgebracht. Het warme lichaam zendt warmtestralen uit, die het koudere lichaam treffen en door dit lichaam worden geabsorbeerd, waardoor het in temperatuur stijgt. Deze warmtestralen zijn van dezelfde aard als lichtstralen en radiogolven; het zijn alle electromagnetische trillingen, die zich rechtlijnig voortplanten, ook in het luchtledige, en die alleen verschillen in golflengte of, wat op hetzelfde neerkomt, in frequentie. Al deze trillingen planten zich in vacuum met dezelfde snelheid voort, nl. ongeveer 300 000 km/sec. De golflengte van de warmtestralen ligt ongeveer tussen 10^{-4} m en 10^{-6} m (zie hfdst. VIII, fig. 1).

De hoeveelheid warmte, die een lichaam met een hogere temperatuur dan die van de omgeving uitstraalt, is, onder overigens gelijke omstandigheden, evenredig met het oppervlak en met het temperatuurverschil tussen dit lichaam en de omgevende middenstof. Verder is deze hoeveelheid warmte afhankelijk van de aard van het oppervlak. Een zwart oppervlak straalt meer warmte uit dan een wit bij dezelfde temperatuur; evenzo straalt een ruw oppervlak meer dan een gepolijst oppervlak. De hoeveelheid warmte, die een lichaam, dat door warmtestralen wordt getroffen, opneemt, hangt op overeenkomstige wijze van de aard van het oppervlak af. Als het uitstralend vermogen het grootst is, is het absorberend vermogen ook het grootst.

7. Smelten, stollen, verdampen, oplossen

Bij kamertemperatuur zijn sommige stoffen vast, andere vloeibaar, andere gasvormig. Door verhoging van de temperatuur worden vele vaste stoffen vloeibaar en vele vloeistoffen gasvormig. Bij verlagen van de temperatuur vindt het omgekeerde plaats.

Nemen we een vaste stof, die door warmtetoevoer vloeibaar kan

worden gemaakt, dan blijkt, dat tijdens het smelten, dus zolang er zowel vaste stof als vloeistof aanwezig is, het mengsel een constante temperatuur behoudt. Pas als alles is gesmolten, stijgt de temperatuur van de vloeistof verder. De temperatuur tijdens het smelten noemen we het smeltpunt. Dit is voor verschillende stoffen verschillend. Onderstaande tabel geeft het smeltpunt voor enkele stoffen. In het algemeen is het smeltpunt van metaallegeringen lager dan dat der metalen, waaruit de legering bestaat.

Smeltpunten

ijs	0 °C	zilver	961 °C	lood	327 °C
koper	1083 °C	wolfraam	3370 °C	tin	232 °C
ijzer	1535 °C	kwik	— 39 °C	2 delen lood + + 1 deel tin	190 °C

Koelen we de gesmolten stof weer af, dan wordt deze weer vast; dit noemen we stollen. Het geschiedt bij dezelfde temperatuur als die, waarbij het vloeibaar werd. Het stolpunt is dus hetzelfde als het smeltpunt. Bij vele stoffen hangen de eigenschappen in de vaste toestand af van de snelheid, waarmee de afkoeling is geschied. IJzer is na snelle afkoeling harder en brozer dan na langzame afkoeling. Glas gedraagt zich evenzo, doch bv. zwavel juist omgekeerd. Vele stoffen stollen in de vorm van kristallen; dat wil zeggen, dat de atomen op een of andere wijze ten opzichte van elkaar regelmatig zijn gerangschikt. Bij langzame afkoeling ontstaan grote kristallen, bij snelle afkoeling kleine. Een stof, die opgebouwd is uit kristallen, noemen we kristallijn; is geen kristalstructuur aanwezig, dan noemen we de stof amorph.

Voor de overgang van de vaste in de vloeibare toestand is warmte nodig; de hoeveelheid warmte, nodig om 1 kg van een stof, die reeds op het smeltpunt is gebracht, van de vaste in de vloeibare toestand te doen overgaan, zonder dat de temperatuur stijgt, noemen we de *smeltingswarmte*. Deze wordt dus uitgedrukt in joules/kg, vroeger in calorieën/kg. Bij de overgang van de vloeibare in de vaste toestand komt deze warmte weer vrij en wordt aan de (koudere) omgeving afgegeven. De smeltingswarmte van ijs is ongeveer $^1/_3 \times 10^6$ J/kg (= 80 cal/kg).

Bij de overgang van de vaste in de vloeibare toestand vindt gewoonlijk een verandering van het volume plaats. De meeste stoffen zetten bij het smelten uit; enige echter krimpen hierbij in, bv. ijs, ijzer, koper.

Een vloeistof in een open vat *verdampt*. Aan de oppervlakte gaat vloeistof in de gasvormige toestand over. Bij sommige stoffen, zg. vluchtige stoffen, bv. ether en alcohol, geschiedt dit vrij snel, bij andere, bv. water, langzamer. Hoe hoger de temperatuur is, des te sneller vindt het verdampen plaats. Voor de overgang van de vloeibare in de gasvormige toestand is warmte nodig. Deze wordt onttrokken

aan de overblijvende vloeistof. Een verdampende vloeistof koelt dus af.

Bevindt een vloeistof zich in een afgesloten ruimte, dan houdt het verdampen spoedig op; de ruimte boven de vloeistof is dan met damp *verzadigd*. Een bepaald volume kan slechts een bepaalde hoeveelheid damp bevatten. Deze hoeveelheid is sterk afhankelijk van de temperatuur; hoe hoger de temperatuur, des te meer damp kan de ruimte bevatten, dus des te hoger is de spanning van de verzadigde damp. Wordt een afgesloten ruimte, waarin zich verzadigde damp bevindt, verkleind, dan neemt de spanning niet volgens de wet van Boyle toe, doch blijft dezelfde; een gedeelte van de damp *condenseert* weer tot vloeistof. Onverzadigde dampen volgen echter bij benadering de wet van Boyle-Gay Lussac.

Wordt een vloeistof in een open vat verwarmd, dan neemt de verdampingssnelheid toe, tot bij een bepaalde temperatuur van de vloeistof niet alleen aan de oppervlakte, doch door de gehele vloeistof heen overgang van de vloeibare in de gasvormige toestand plaats vindt; de vloeistof *kookt*. Tijdens dit koken blijft de temperatuur van de vloeistof, die dezelfde is als die van de gevormde damp, dezelfde. Deze temperatuur heet het *kookpunt*. Het kookpunt is niet voor alle vloeistoffen hetzelfde. Bovendien is het kookpunt afhankelijk van de druk; hoe hoger de druk, des te hoger is het kookpunt. We hebben reeds gezien, dat het kookpunt van water bij normale druk van de atmosfeer 100 °C bedraagt. Voor ether is het 35 °C, voor kwik 360 °C. De hoeveelheid warmte, die moet worden toegevoerd aan 1 kg vloeistof, die reeds op de temperatuur van het kookpunt is gebracht, om deze geheel in damp van dezelfde temperatuur te doen overgaan, heet de *verdampingswarmte*. Gaat de damp in vloeistof over, dan komt deze warmte weer vrij. Voor water is de verdampingswarmte bij normale druk van de atmosfeer (76 cm kwik) $2{,}25 \times 10^6$ J/kg (= 539 cal/kg).

Er zijn vele vaste stoffen, die in water en andere vloeistoffen *oplossen*. In een bepaalde hoeveelheid vloeistof kan slechts een bepaalde hoeveelheid vaste stof oplossen; zo is 1 kg water met ongeveer 0,36 kg keukenzout *verzadigd;* voegt men meer keukenzout toe, dan blijft dit meerdere onopgelost. In de meeste gevallen is de hoeveelheid, die kan worden opgelost, afhankelijk van de temperatuur; hoe hoger de temperatuur, des te meer kan worden opgelost (bij keukenzout in water is de invloed van de temperatuur gering).

Voor het oplossen is in het algemeen warmte nodig; deze wordt aan de vloeistof onttrokken. Hierop berusten de *afkoelende mengsels*. Mengen we bv. 1 kg droge sneeuw met $^1/_2$ kg keukenzout, dan wordt het mengsel vloeibaar, terwijl de temperatuur kan dalen tot ongeveer — 20 °C. Andere afkoelende mengsels zijn: glauberzout en zoutzuur, ammoniumnitraat en water, chloorcalcium en sneeuw.

Door in een vloeistof een stof op te lossen wordt het stolpunt van de vloeistof verlaagd; hierdoor werd het eerstgenoemde mengsel bij de lage temperatuur vloeibaar, en begint zeewater pas te bevriezen bij een temperatuur beneden 0 °C.

Laat men een warme, verzadigde oplossing langzaam afkoelen, dan wordt de opgeloste stof weer vast, gewoonlijk in de vorm van kristallen. Bij het verder afkoelen, waarbij tevens vloeistof verdampt, worden deze kristallen geleidelijk groter. Hierbij komt de warmte, die voor het oplossen nodig was, weer vrij en wordt aan de vloeistof medegedeeld.

Ook verschillende gassen kunnen in vloeistoffen worden opgelost. Hoe hoger de druk van het gas boven de vloeistof, des te meer kan er in de vloeistof oplossen.

VIII. LICHT

1. Inleiding

De lichamen, die we met het oog kunnen waarnemen, noemen we lichtgevend. Sommige van deze brengen zelf licht voort, bv. de zon, een electrische gloeilamp en een kaarsvlam; men noemt deze *lichtbronnen*. De overige lichamen zijn *donkere lichamen* en worden alleen zichtbaar, als ze direct of indirect worden verlicht door een lichtbron en hierdoor licht geven.

De lichtstralen planten zich in een homogene middenstof rechtlijnig voort. Lichtstralen zijn van dezelfde aard als warmtestralen en radiogolven; het zijn alle electromagnetische trillingen, die slechts verschillen in golflengte, dus ook in frequentie, daar de voortplantingssnelheid voor al deze trillingen dezelfde is, nl. 3×10^8 m/sec. In fig. 1 (zie blz. 104) is een overzicht gegeven van al de verschillende electromagnetische trillingen. De golflengte van het zichtbare licht ligt tussen $0{,}4 \times 10^{-6}$ en $0{,}7 \times 10^{-6}$ m; de frequentie tussen $0{,}75 \times 10^{15}$ en $0{,}43 \times 10^{15}$ Hz.

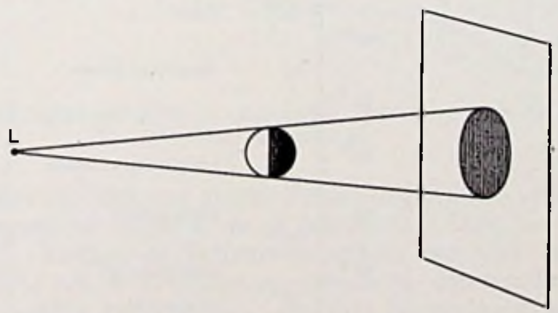


Fig. 2. Een puntvormige lichtbron L verlicht een ondoorschijnende bol; er ontstaat schaduw.

Een puntvormige lichtbron (fig. 2), die een ondoorschijnende bol verlicht, werpt op een er achter geplaatst vlak een cirkelvormige schaduw. Een lichtbron bezit een zekere grootte en kan in vele gevallen niet als puntvormig worden beschouwd. Van ieder deel van de lichtbron (fig. 3) gaan lichtstralen uit. Op een achter een verlicht voorwerp geplaatst vlak ontstaat een in het geheel niet verlichte *kernschaduw* of

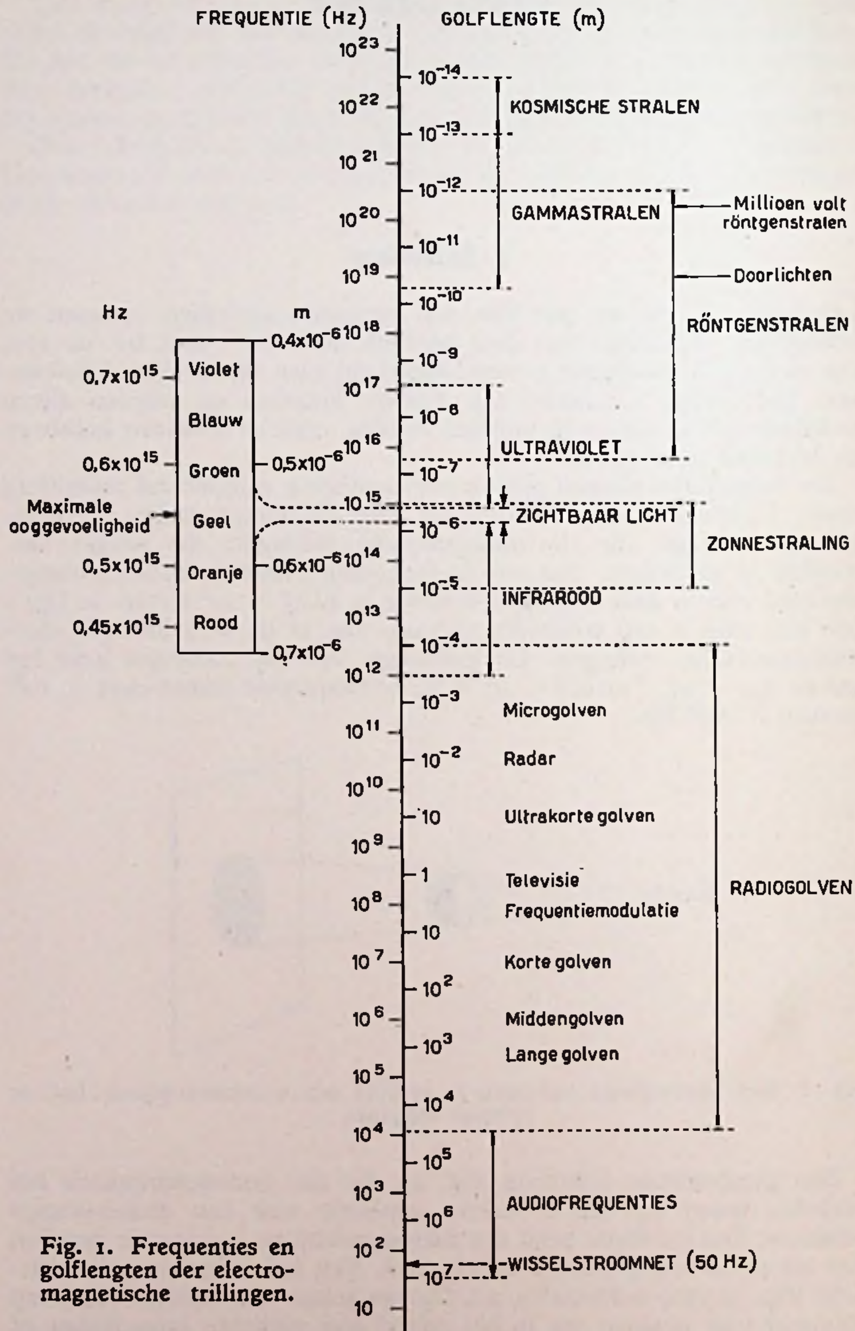


Fig. 1. Frequenties en golflengten der electromagnetische trillingen.

slagschaduw, omgeven door een *halfschaduw,* die slechts door een klein deel der van de lichtbron uitgaande stralen wordt verlicht. Ook op de verlichte bol ontstaat een verlicht gedeelte, een slagschaduw en een halfschaduw.

Van een puntvormige lichtbron L (fig. 4) gaan de lichtstralen uit volgens rechte lijnen. Een vlak ABCD ontvangt een zekere hoeveelheid

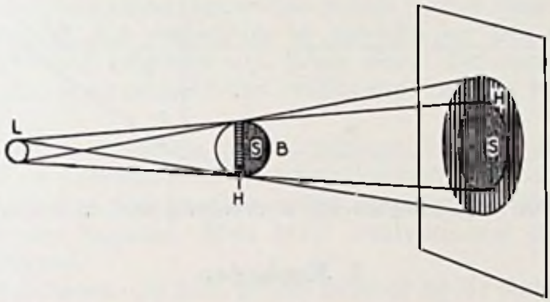


Fig. 3. Een lichtbron L met eindige afmetingen verlicht een bol B; er ontstaat een kernschaduw of slagschaduw S en een halfschaduw H.

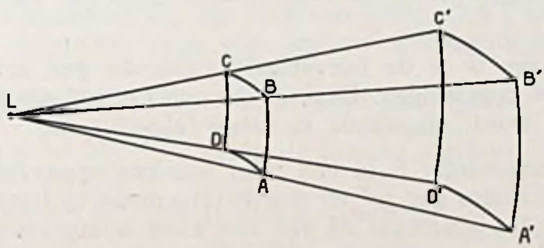


Fig. 4. De verlichtingssterkte is omgekeerd evenredig met de tweede macht van de afstand.

licht, waarmee dit vlak een zekere verlichtingssterkte verkrijgt. Onder de *verlichtingssterkte* verstaan we de hoeveelheid licht, die een vlak per m^2 ontvangt. Treffen de lichtstralen echter een vlak A'B'C'D', dat tweemaal zover van de lichtbron is verwijderd, dan wordt een viermaal zo groot oppervlak verlicht door dezelfde hoeveelheid licht. De verlichtingssterkte is dus omgekeerd evenredig met de tweede macht van de afstand tot de lichtbron.

In fig. 4 worden de vlakken loodrecht getroffen door de lichtstralen. In fig. 5 wordt het vlak AB verlicht door een loodrecht opvallende bundel evenwijdige lichtstralen. Wordt het vlak gedraaid over een hoek α, zodat het in de stand AC komt, dan is de hoeveelheid licht, die het vlak treft, kleiner, dus de verlichtingssterkte eveneens, en wel in de verhouding $\frac{AD}{AB} = \cos \alpha$. De verlichtingssterkte is dus evenredig

met de cosinus van de invalshoek der lichtstralen (onder de invalshoek verstaan we de hoek tussen de lichtstralen en de normaal op het oppervlak, dus in fig. 4 ∠ DCN).

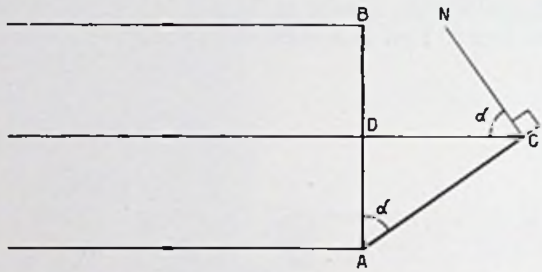


Fig. 5. De verlichtingssterkte is evenredig met de invalshoek α.

2. Eenheden

Evenals voor alle andere natuurkundige grootheden zijn voor het licht eenheden vastgesteld, waarmede de lichtsterkte van een lichtbron, en de verlichtingssterkte van een verlicht oppervlak kunnen worden gemeten.

De *lichtstroom* Φ is de hoeveelheid licht, die per secunde wordt uitgestraald of opgevangen. Deze is een energie per secunde, dus een vermogen en wordt uitgedrukt in *lumen* (afgekort lm).

De *verlichtingssterkte E* in een punt van een oppervlak is de opvallende lichtstroom per m^2 en wordt uitgedrukt in lumen/m^2 = *lux* (afgekort lx). De *emittantie H* van een klein lichtgevend of verlicht oppervlak is het quotiënt van de uitgestraalde lichtstroom en de grootte van het oppervlak. Deze wordt eveneens in lux uitgedrukt.

De *lichtsterkte I* van een lichtgevend punt is de lichtstroom, per eenheid van ruimtehoek in een bepaalde richting uitgestraald. Een ruimtehoek wordt uitgedrukt in steradialen. Een steradiaal wordt op overeenkomstige wijze gedefinieerd als een radiaal in het platte vlak. Een radiaal is de middelpuntshoek in een cirkel, die staat op een boog, die even lang is als de straal van de cirkel. Is de straal de lengteeenheid, dan is een radiaal dus een hoek, die staat op een boog met de lengte 1. We denken ons nu een bol met een straal van 1 m. Op het oppervlak van de bol beschrijven we een cirkel, zodanig, dat het ingesloten deel van het boloppervlak 1 m^2 is. Vervolgens beschouwen we de kegel met de top in het middelpunt en de beschouwde cirkel als grondvlak. De ruimtelijke tophoek van de kegel is dan 1 steradiaal. De lichtsterkte *I* van een lichtgevend punt is een lichtstroom gedeeld door een ruimtehoek, dus een aantal lumen gedeeld door een aantal steradialen. We noemen 1 lumen per steradiaal 1 *candéla* (afgekort cd).

Bij een lichtbron, die niet puntvormig is, doch een zekere uitgebreidheid bezit, verstaat men onder de lichtsterkte de limietwaarde, waartoe de lichtstroom per eenheid van ruimtehoek nadert bij toenemende afstand tot de lichtbron, wanneer de top van de ruimtehoek blijft samenvallen met een punt van de lichtbron.

De *luminantie* L in een punt van een lichtgevend oppervlak in een bepaalde richting is het quotiënt van de lichtsterkte van een oppervlakelement en het schijnbare oppervlak gezien vanuit deze richting. De luminantie wordt dus uitgedrukt in candéla per m^2; deze eenheid wordt *nit* genoemd (afgekort nt). Soms wordt het oppervlak in cm^2 uitgedrukt: dan is de eenheid van luminantie: candéla per cm^2 = *stilb* (afgekort sb).

We zien, dat de eenheden van lichtstroom Φ, verlichtingssterkte E, lichtsterkte I en luminantie L uit elkaar kunnen worden afgeleid. Eén dezer eenheden kan willekeurig worden aangenomen; dan zijn ook de andere eenheden bepaald. Men heeft internationaal de candéla als volgt gedefinieerd.

Een zwart lichaam, dat zich geheel bevindt op de smelttemperatuur van platina (2041,7 °K), zendt per cm^2 en per steradiaal een lichtstroom uit van 60 lumen. Dat wil zeggen, dat 1 cm^2 van het oppervlak van een dergelijk lichaam als standaardlichtbron kan dienen; het straalt 60 lumen per steradiaal uit, dus heeft een lichtsterkte I van 60 candéla.

(Vroeger gebruikte men een andere standaardlichtbron, *kaars* genoemd.)

Het bovenstaande kan als volgt worden samengevat.

$$\text{Lichtstroom } \Phi = \frac{\text{energie}}{\text{secunde}}; \text{ eenheid: lumen; afgekort: lm.}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Verlichtingssterkte } E\\ \text{Emittantie } H\end{array}\right\} = \frac{\text{lichtstroom}}{\text{oppervlak}} = \frac{\text{lumen}}{\text{m}^2} = \text{lux; afgekort: lx.}$$

$$\text{Lichtsterkte } I = \frac{\text{lichtstroom}}{\text{ruimtehoek}} = \frac{\text{lumen}}{\text{sterad}} = \text{candéla; afgekort: cd.}$$

$$\text{Luminantie } L = \frac{\text{lichtstroom}}{\text{oppervlak} \times \text{ruimtehoek}} = \frac{\text{candéla}}{\text{m}^2} = \frac{\text{lumen}}{\text{m}^2 \times \text{sterad}} = \text{nit; afgekort: nt.}$$

3. Terugkaatsing van het licht

a. Vlakke spiegels

Wordt een voorwerp door een lichtstraal getroffen, dan wordt een gedeelte van het licht geabsorbeerd en een gedeelte teruggekaatst. Een ruw oppervlak kaatst het licht naar alle kanten terug, waardoor we dit oppervlak kunnen zien. Een volkomen glad, spiegelend oppervlak kaatst een lichtstraal terug in één bepaalde richting, en wel zo, dat de invallende straal, de teruggekaatste straal en de loodlijn op het spiegelend

vlak in het trefpunt in één plat vlak liggen, en de hoek tussen de teruggekaatste straal en de normaal (de hoek van terugkaatsing) gelijk is aan de hoek tussen de invallende straal en de normaal (de hoek van inval) (fig. 6).

Zien we naar een lichtpunt P, dan treedt een divergerende lichtbundel de pupil van ons oog binnen (fig. 7). (Een divergerende lichtbundel

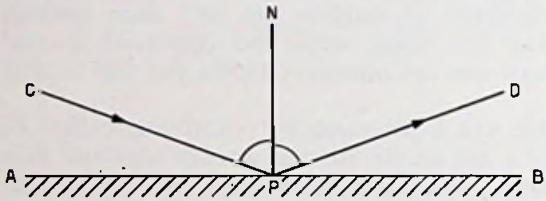


Fig. 6. Aan een spiegelend oppervlak is de hoek van terugkaatsing gelijk aan de hoek van inval.



Fig. 7. We zien een punt daar, waar de richtingen, waarin lichtstralen in het oog vallen, elkaar snijden.

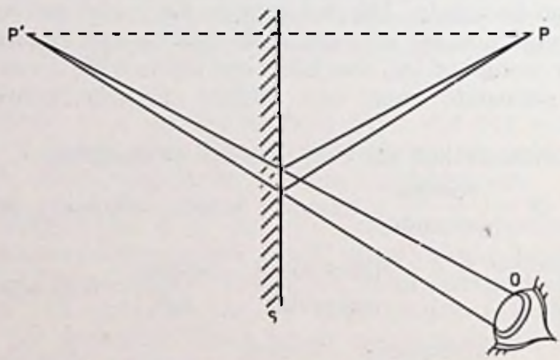


Fig. 8. Het ontstaan van het spiegelbeeld P′ van het punt P in een vlakke spiegel.

is een bundel, waarvan de stralen uiteen lopen; bij een convergerende bundel zijn de lichtstralen alle naar eenzelfde punt gericht.) We krijgen dan de indruk, dat het punt zich bevindt in het snijpunt der stralen, die ons oog bereiken. Zien we in een spiegel (fig. 8), dan bereikt eveneens een divergerende lichtbundel ons oog. We krijgen weer de indruk, dat het punt zich bevindt in het snijpunt der lichtstralen, die het oog bereiken; we zien het spiegelbeeld P′. Daar de hoek van inval gelijk is aan de hoek van terugkaatsing, lijkt het punt P′ even ver achter de spiegel als het punt P voor de spiegel; verder staat de lijn PP′ loodrecht op het oppervlak van de spiegel S.

De spiegels voor huiselijk gebruik bestaan uit een glazen plaat, aan de achterzijde met een spiegelende metaallaag bedekt. De spiegeling

vindt in hoofdzaak plaats aan het metaaloppervlak aan de achterzijde. Doch ook aan de voorzijde vindt spiegeling plaats, hoewel zwakker; daardoor kunnen we een tweede, zwakker, spiegelbeeld zien, dichterbij dan het bedoelde door de achterzijde veroorzaakte beeld. Bovendien treedt herhaalde terugkaatsing op, zoals in fig. 9 aangegeven, waardoor een aantal zwakke beelden ontstaat.

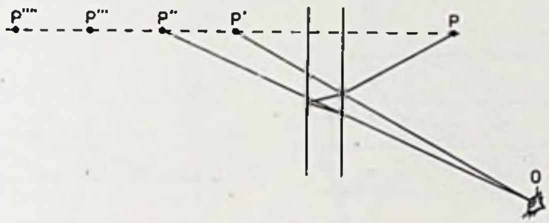


Fig. 9. Het ontstaan van een aantal spiegelbeelden van het punt P door een vlakke glazen plaat, die aan de voorzijde en aan de achterzijde terugkaatst.

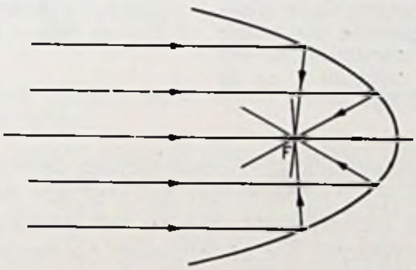


Fig. 10. Holle spiegelende omwentelingsparaboloïde. Lichtstralen, die evenwijdig met de as invallen, gaan na terugkaatsing door het brandpunt F.

b. Holle spiegels

Een spiegel, waarvan het oppervlak een deel van een bol of een omwentelingsparaboloïde is (zie hfdst. III) wordt een *holle spiegel* genoemd, als de holle oppervlakte spiegelend is, en een *bolle spiegel*, als de bolle oppervlakte spiegelend is.

Valt een bundel evenwijdige lichtstralen op een holle spiegel (fig. 10), dan worden deze zodanig teruggekaatst, dat voor iedere straal de hoek van inval gelijk is aan de hoek van terugkaatsing, dus zo, dat een teruggekaatste straal dezelfde hoek maakt met de normaal op het oppervlak als de invallende straal.

Uit hetgeen in hfdst. III is medegedeeld over de omwentelingsparaboloïde volgt, dat bij een parabolische holle spiegel de evenwijdig invallende stralen na terugkaatsing alle door het brandpunt F gaan. We noemen dit punt het hoofdbrandpunt of focus. Bij een bolvormige

holle spiegel (fig. 11) gaan de teruggekaatste stralen alle ten naaste bij door een punt, dat ook hier hoofdbrandpunt heet. Dit punt ligt midden tussen het middelpunt of centrum C van de bol en het boloppervlak.

We noemen de hoek BCD (fig. 11) de openingshoek of apertuur van de spiegel. Alleen als de openingshoek klein is, gaan de teruggekaatste stralen bij een bolvormige spiegel vrijwel alle door het brandpunt F; is de openingshoek groot, dan snijden de teruggekaatste stralen de as CA tussen C en F; hoe verder het trefpunt van A is verwijderd, des te verder ligt het snijpunt van de teruggekaatste straal met de hoofdas van F verwijderd. We onderstellen nu verder holle bolvormige spiegels met kleine openingshoek.

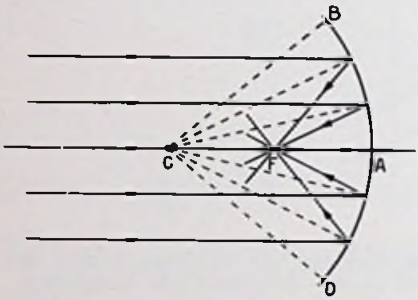


Fig. 11. Bolvormige holle spiegel. Lichtstralen, die evenwijdig aan de as invallen, gaan na terugkaatsing ten naaste bij door het hoofdbrandpunt F, dat midden tussen het centrum C en de spiegel ligt.

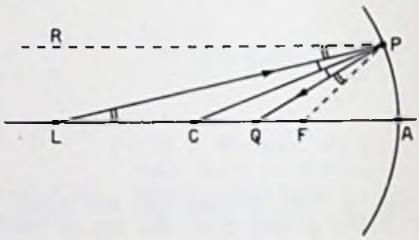


Fig. 12. L en Q zijn elkaars koppelbrandpunten.
LF = p; QF = q; FA = f; $pq = f^2$.

De stralen van een in het hoofdbrandpunt geplaatste lichtbron, die de holle spiegel treffen, worden teruggekaatst evenwijdig aan de hoofdas (voor een parabolische spiegel geldt dit exact, voor een bolvormige spiegel met goede benadering).

Stralen, die door het centrum C gaan, vallen loodrecht op de spiegel en worden in dezelfde richting teruggekaatst.

Een straal, afkomstig van een lichtbron L, verder dan C van de spiegel verwijderd (fig. 12), wordt zo teruggekaatst, dat $\angle$ LPC = = $\angle$ QPC. Daar $\angle$ FPQ = $\angle$ RPL = $\angle$ PLF zijn de driehoeken PLF en QPF gelijkvormig, daar $\angle$ PLF = $\angle$ QPF en de driehoeken $\angle$ LFP gemeen hebben. Hieruit volgt LF : PF = PF : FQ. Daar we de openingshoek van de spiegel klein hebben ondersteld, mogen we PF gelijk stellen aan de hoofdbrandpuntsafstand FA, die we f noemen. Noemen we LF = p en QF = q, dan is dus $p : f = f : q$ of

$$p\,q = f^2. \qquad (1)$$

Alle lichtstralen, die van L uitgaan en door de spiegel worden

teruggekaatst, gaan dus door hetzelfde punt Q. Plaatsen we omgekeerd de lichtbron in Q, dan gaan alle teruggekaatste stralen door L. Deze twee punten noemen we elkaars *koppelbrandpunten*. In Q ontstaat dus een *reëel beeld* van L en in L een reëel beeld van Q, omdat in deze beeldpunten de lichtstralen werkelijk samenkomen. De beelden, die we bij een vlakke spiegel verkregen, noemen we *virtuele beelden*, omdat

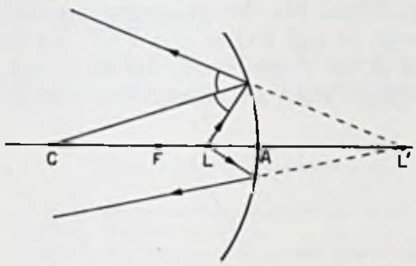


Fig. 13. Lichtstralen, die uitgaan van een punt L tussen het hoofdbrandpunt en de spiegel, vormen na terugkaatsing een divergerende bundel. In L' ontstaat een virtueel beeld.

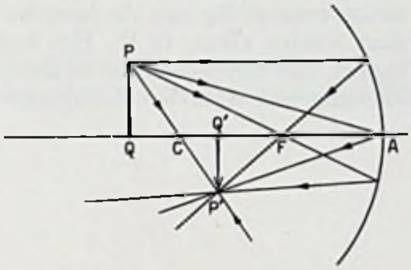


Fig. 14. Constructie van het reële beeld P'Q' van het voorwerp PQ bij een holle spiegel. Van de vier getekende stralen zijn er voor de constructie slechts twee nodig.

daar geen lichtstralen samenkomen, doch slechts een snijpunt op die plaats schijnen te hebben.

Lichtstralen, die uitgaan van een punt L tussen het hoofdbrandpunt en de spiegel gelegen, vormen na terugkaatsing een divergerende bundel, waarvan de stralen schijnen te komen van een punt L' aan de andere zijde van de spiegel (fig. 13). Ook nu is $LF : f = f : L'F$. In het punt L' ontstaat nu een virtueel beeld. Noemen we nu ook de afstanden van het lichtend punt L en het beeldpunt L' tot het brandpunt p en q, dan is ook in dit geval $p\,q = f^2$.

Noemen we de afstanden van L en L' tot de spiegel a en b, dan kunnen we uit (1) afleiden:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Plaatsen we een verticale lijn voor een holle spiegel (fig. 14), dan kunnen we het beeld hiervan als volgt construeren.

In het voorgaande hebben we gezien:

1e. stralen, die evenwijdig aan de hoofdas invallen, gaan na terugkaatsing door het hoofdbrandpunt;

2e. stralen, die door het hoofdbrandpunt gaan, lopen na terugkaatsing evenwijdig aan de hoofdas;

3e. stralen, die door het centrum gaan, gaan na terugkaatsing weer door het centrum;

4e. uit de symmetrie volgt, dat een straal, die de spiegel in A treft onder een hoek met de hoofdas, na terugkaatsing dezelfde hoek met de hoofdas maakt.

Om van een bepaald punt het beeldpunt te vinden, trekken we door dit punt twee lichtstralen en bepalen het snijpunt na terugkaatsing. In fig. 14 is o.a. door het punt P de straal door het centrum C en de straal evenwijdig aan de hoofdas getrokken. Na terugkaatsing snijden deze stralen elkaar in P'. Het beeld van de pijl PQ is dus P'Q'. In de figuur zijn bovendien de stralen door A en F getekend, die na terugkaatsing ook door het beeldpunt P' gaan. Voor de constructie van P'

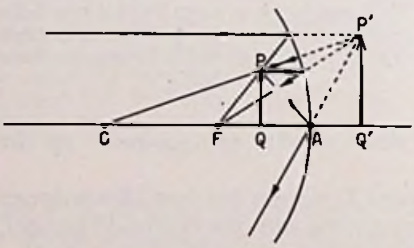


Fig. 15. Constructie van het virtuele beeld P'Q' van het voorwerp PQ bij een holle spiegel. Van de vier getekende stralen zijn er slechts twee nodig voor de constructie.

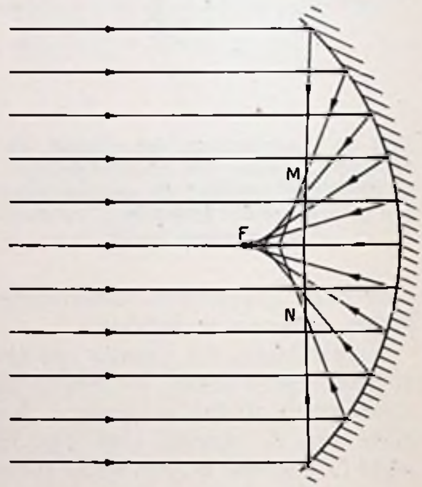


Fig. 16. Sferische aberratie.

zijn twee dezer vier stralen voldoende. Er ontstaat een verkleind, omgekeerd, reëel beeld. In fig. 15 is het beeld geconstrueerd van de pijl PQ, die zich bevindt tussen het hoofdbrandpunt F en de spiegel. Het is een vergroot, rechtopstaand, virtueel beeld.

Door gebruik te maken van de onder 4e genoemde straal blijkt, dat zowel in fig. 14 als in fig. 15 de grootten van voorwerp en beeld zich verhouden als hun afstanden tot de spiegel.

We hebben tot nu toe ondersteld, dat de openingshoek van de bolvormige spiegel klein was. Is dit niet het geval, dan gaan bij evenwijdig aan de hoofdas invallende stralen de teruggekaatste stralen niet alle door het brandpunt; de stralen, die door de rand worden teruggekaatst, snijden de hoofdas tussen het brandpunt en de spiegel (fig. 16). De lijnen FM en FN, die de omhullende is der teruggekaatste stralen, heten brandlijnen; het vlak, dat ontstaat door de figuur om de as te wentelen, heet brandvlak. Ook voor lichtstralen, uitgaande van een

punt, treedt een dergelijk verschijnsel op. Het gevolg is, dat de verkregen beelden niet scherp zijn. Dit verschijnsel wordt *sferische aberratie* (afwijking wegens de bolvorm) genoemd. Om de storende invloed hiervan te vermijden, moet de openingshoek van de spiegel klein worden genomen. Heeft de spiegel de vorm van een omwentelingsparaboloïde, dan treedt deze aberratie niet op; doch een dergelijke spiegel is zeer moeilijk te maken.

c. Bolle spiegels

Bij een bolle spiegel worden lichtstralen, die evenwijdig aan de hoofdas invallen, zo teruggekaatst, dat ze schijnen te komen van een

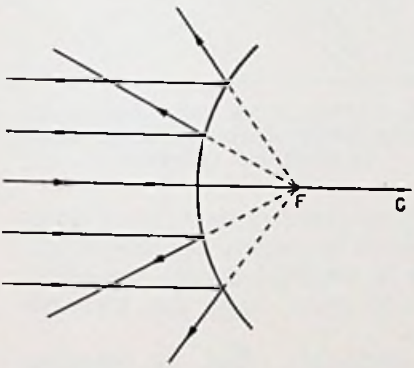


Fig. 17. Bolle spiegel met virtueel hoofdbrandpunt F.

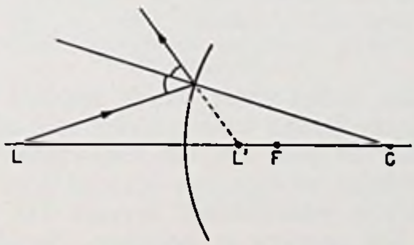


Fig. 18. Bolle spiegel met lichtend punt L en virtueel koppelbrandpunt L'.

punt F (fig. 17), dat weer midden tussen het middelpunt van de bol en de spiegel ligt. Dit punt is het *virtuele hoofdbrandpunt*. Lichtstralen, die van een punt L uitgaan, worden zo teruggekaatst, dat ze afkomstig schijnen van het bij dit punt behorende virtuele koppelbrandpunt L' (fig. 18). Lichtstralen, die in de richting naar het middelpunt van de bol invallen, worden in tegengestelde richting teruggekaatst.

De constructie van een beeld verloopt op overeenkomstige wijze als bij holle spiegels. Het beeld is steeds verkleind, rechtopstaand, virtueel. Het bevindt zich tussen het hoofdbrandpunt en de spiegel.

Is de openingshoek niet klein, dan treedt ook hier sferische aberratie op.

4. Breking van het licht

Gaat een lichtstraal van de ene middenstof over in een andere middenstof, dan gaat de straal in het algemeen aan het grensvlak niet in dezelfde richting door, doch wordt gebroken (fig. 19). De hoek α, die de lichtstraal in de eerste middenstof maakt met de normaal op het scheidingsvlak, noemen we de hoek van inval; de hoek β, die de

lichtstraal in de tweede middenstof maakt met deze normaal, noemen we de hoek van breking. Bij de overgang van lucht in water of in glas is $\angle \alpha > \angle \beta$. Alleen als de lichtstraal loodrecht op het scheidingsvlak invalt, gaat hij ongebroken verder. Bij een lichtstraal in de omgekeerde richting, dus in fig. 19 bij een lichtstraal, uitgaande van een lichtend

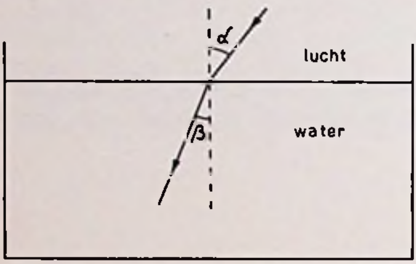


Fig. 19. Breking van de lichtstraal.

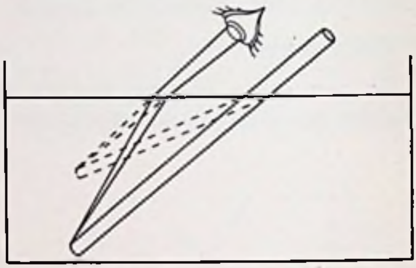


Fig. 20. Een rechte stok, schuin in het water gestoken, schijnt aan het wateroppervlak gebroken.

punt in het water, wordt dezelfde weg in omgekeerde richting doorlopen. Steken we een rechte stok schuin in het water, dan schijnt het, alsof de stok aan het wateroppervlak in omgekeerde zin wordt gebroken; we zien een lichtend punt onder water hoger dan waar het zich in werkelijkheid bevindt (fig. 20).

Uit proeven is gebleken, dat de invallende straal, de gebroken straal en de normaal op het scheidingsvlak in een plat vlak liggen en dat de verhouding van de sinus van de hoek van inval en de sinus van de hoek van breking voor eenzelfde paar middenstoffen constant is. Dit is de *wet van Snellius*. Is de eerste middenstof vacuum (of, wat practisch op hetzelfde neerkomt, lucht), de hoek van inval α en de hoek van breking in de tweede middenstof β, dan noemen we $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ de ***brekingsindex*** van deze tweede stof. Voor water is de brekingsindex $^4/_3$.

Deze straalbreking vindt zijn oorzaak in het verschil in voortplantingssnelheid van het licht in de verschillende middenstoffen. We hebben reeds vermeld, dat het licht kan worden beschouwd als een voortplanting van electromagnetische golven. Volgens het principe van Huygens (Christiaan Huygens, Nederlands wis- en natuurkundige, 1629—1695) kan ieder punt, dat door een golfbeweging wordt bereikt, worden beschouwd als een oorsprong van een nieuwe golfbeweging. In een zg. vlakke golf verkeren de punten van een plat vlak loodrecht op de voortplantingsrichting in dezelfde trillingstoestand. Zij in fig. 21 AB zulk een vlak; op zeker ogenblik worden al de punten van dit vlak getroffen en zenden tegelijk nieuwe zich bolvormig uitbreidende golven uit. Een korte tijd later is het gemeenschappelijk raakvlak van

deze golven CD, evenwijdig aan AB en is de voortplantingsrichting loodrecht op CD, dus is dezelfde gebleven. Treft nu een dergelijke golfbeweging het scheidingsvlak met een andere middenstof, waarin de voortplantingssnelheid kleiner is, dan zullen de verschillende stralen, waaruit de lichtbundel bestaat, bij schuine inval niet gelijktijdig dit

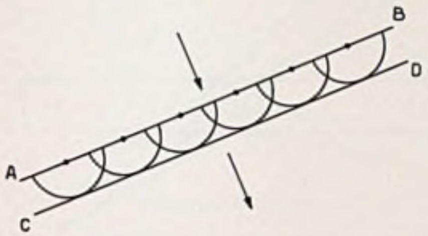


Fig. 21. Principe van Huygens voor de voortplanting van het licht.

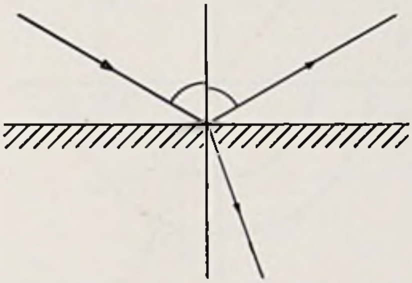


Fig. 23. Een invallende lichtstraal wordt gedeeltelijk gebroken, gedeeltelijk teruggekaatst.

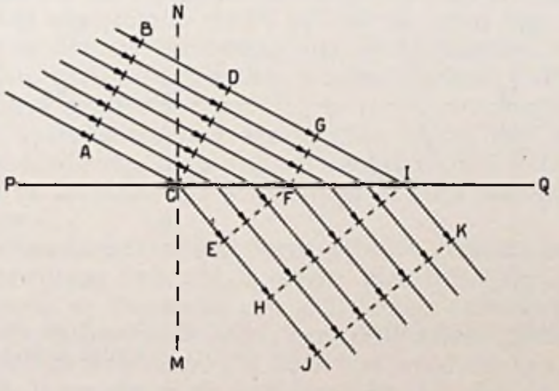


Fig. 22. De breking van het licht is een gevolg van het verschil in voortplantingssnelheid in de beide middenstoffen.

scheidingsvlak bereiken (fig. 22). Als een lichtstraal het scheidingsvlak PQ bereikt, wordt het trefpunt het middelpunt van een zich bolvormig uitbreidende golf. Enkele golffronten zijn aangegeven door AB, CD, EFG, HI, JK. De afstand CH in de tweede middenstof wordt afgelegd in dezelfde tijd als de afstand DI in de eerste middenstof. De voortplantingssnelheden verhouden zich dus als DI : CH. De hoek van inval is $\alpha = \angle$ ACN $= \angle$ ICD; de hoek van breking is $\beta = \angle$ HCM $= \angle$ HIC; $\sin\alpha = \frac{DI}{CI}$; $\sin\beta = \frac{CH}{CI}$, dus is $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{CH}{DI}$,

dus gelijk aan de verhouding der voortplantingssnelheden in de beide middenstoffen.

Aan het grensvlak wordt een gedeelte van het licht teruggekaatst, terwijl het overige gedeelte wordt gebroken. De gebroken straal is dus zwakker dan de invallende (fig. 23).

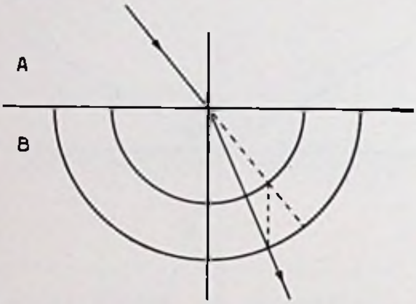


Fig. 24. Constructie van de gebroken straal. De stralen der cirkels verhouden zich als de brekingsindices der beide middenstoffen A en B.

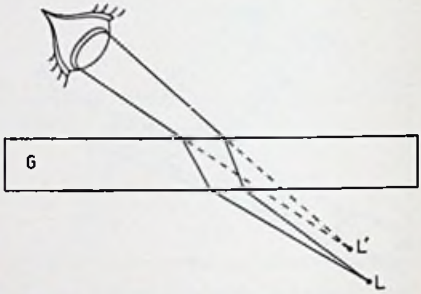


Fig. 25. Gang der lichtstralen door een glazen plaat.

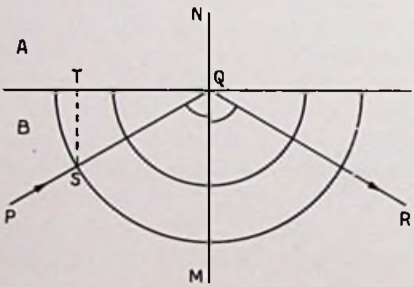


Fig. 26. Totale terugkaatsing.

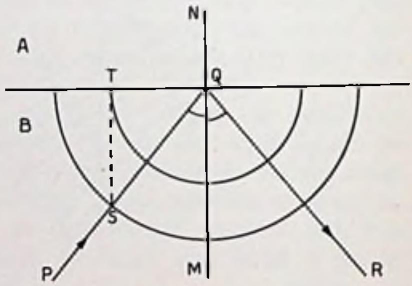


Fig. 27. Grenshoek van de totale terugkaatsing.

In fig. 24 is een eenvoudige constructie aangegeven om, als de invalsrichting van een lichtstraal is gegeven, alsmede de verhouding der brekingsindices der beide middenstoffen, de richting van de gebroken straal te vinden. De verklaring van deze constructie laten we aan de lezer over.

In fig. 25 is de gang der lichtstralen door een glazen plaat geschetst. Aan weerszijden van de plaat zijn de stralen evenwijdig; een lichtend punt L aan de andere zijde ziet men echter verschoven naar L'.

De constructie van de gebroken straal volgens fig. 24 is altijd mogelijk, als de lichtstraal invalt vanuit de middenstof met de kleinste brekingsindex (dus de grootste voortplantingssnelheid). Valt de lichtstraal echter in vanuit de middenstof met de grootste brekingsindex (fig. 26),

dan is bij een grote hoek van inval de constructie niet meer mogelijk; de lichtstraal PQ snijdt de grote cirkel in een punt S zodanig, dat de loodlijn ST de kleine cirkel niet meer snijdt. De lichtstraal wordt dan teruggekaatst in de richting QR, waarbij de hoek van inval en de hoek van terugkaatsing gelijk zijn. We spreken in dit geval van *totale*

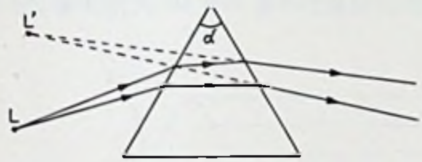


Fig. 28. Gang der lichtstralen door een prisma.

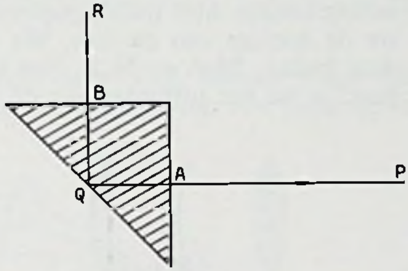


Fig. 29. Totale terugkaatsing in een prisma.

terugkaatsing; bij de terugkaatsing vermindert de intensiteit van het licht niet. Dit verschijnsel treedt op, als de sinus van de hoek van inval groter is dan de verhouding der brekingsindices van de beide middenstoffen, zoals uit fig. 27 kan worden afgeleid. $\angle$ PQM (fig. 27) wordt *grenshoek* genoemd.

Laten we lichtstralen door een prisma vallen, dan verkrijgt hun richting een afwijking, zoals fig. 28 aangeeft. Een lichtend punt L zien we dan op de plaats L'. We noemen de hoek α de brekende hoek van het prisma.

Van de totale terugkaatsing wordt gebruik gemaakt om een lichtstraal een afwijking van 90° te geven met behulp van een glazen prisma, waarvan de doorsnede een gelijkbenige rechthoekige driehoek is (fig. 29). De lichtstraal PQ valt loodrecht op een zijvlak in en gaat dus bij A ongebroken door. De hoek van inval op het schuine vlak bij Q is 45°. Voor glas is de brekingsindex $^2/_3$, dus de grenshoek φ is gegeven door sin $\varphi = {}^2/_3$, dus $\varphi = 41°49'$. Daar de hoek van inval bij Q groter is dan deze grenshoek, vindt bij Q totale terugkaatsing plaats. De lichtstraal treft bij B het scheidingsvlak loodrecht en gaat daar dus ongebroken door, zodat QR $\perp$ PQ.

5. Lenzen

De belangrijkste toepassing, die van de breking der lichtstralen wordt gemaakt, vinden we bij lenzen. In de meeste gevallen zijn lenzen van glas gemaakt. Het zijn dan glazen schijven, waarvan beide vlakken delen zijn van bollen, soms met een verschillende straal. Een der vlakken kan ook een plat vlak zijn. Is de lens in het midden dikker

dan aan de rand, dan noemen we de lens *bol* of *convex;* is de lens in het midden dunner dan aan de rand, dan noemen we de lens *hol* of *concaaf.* In fig. 30 zijn enkele lenzen in doorsnede getekend.

a. Bolle lenzen

In fig. 31 is een dubbelbolle lens aangegeven, begrensd door twee bolsegmenten met middelpunten M_1 en M_2. De lijn $M_1 M_2$ noemen we de *hoofdas* van de lens. We trekken twee evenwijdige stralen van deze bollen, M_1A en M_2B. Een lichtstraal, die in de lens door A en B gaat, is na het uittreden uit de lens evenwijdig aan de richting voor

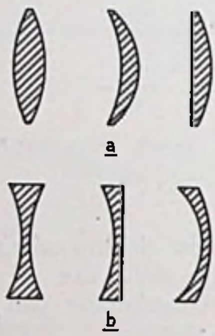


Fig. 30. a. Bolle lenzen; b. holle lenzen.

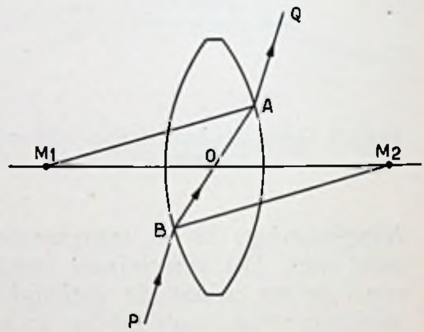


Fig. 31. Gang van een lichtstraal door een dubbelbolle lens.

het intreden, dus PB // AQ. Het snijpunt O met de hoofdas is het optisch middelpunt van de lens. Alle lichtstralen, waarvan de richting niet verandert, doch die alleen een weinig worden verschoven, gaan door dit optisch middelpunt. Indien de lens dun is, zoals gewoonlijk het geval is, kunnen we de kleine verschuiving wel verwaarlozen, zodat we mogen zeggen, dat lichtstralen, die door het optisch middelpunt gaan, ongebroken doorgaan.

De lichtstralen van een bundel, die evenwijdig aan de hoofdas op een bolle lens valt, worden zo gebroken, dat ze alle aan de andere zijde van de lens door één punt gaan (fig. 32). Dit punt heet het *hoofdbrandpunt* F. De afstand van dit hoofdbrandpunt tot de lens noemen we de *brandpuntsafstand f.* Omgekeerd treden alle lichtstralen, die van het hoofdbrandpunt uitgaan en op de lens vallen, evenwijdig aan de hoofdas uit. Laten we van de andere zijde (dus in fig. 32 van rechts) een evenwijdige bundel invallen, dan worden deze stralen eveneens zo gebroken, dat ze alle door eenzelfde punt F′ gaan, dat even ver van de lens is verwijderd als F. Er zijn dus twee hoofdbrandpunten.

Lichtstralen, die uitgaan van een punt L op de hoofdas, dat verder dan het hoofdbrandpunt van de lens is verwijderd (fig. 33), komen

aan de andere zijde van de lens samen in een punt L', dat eveneens verder dan het hoofdbrandpunt van de lens is verwijderd. We noemen de punten L en L' elkaars *koppelbrandpunt*. Stellen we de afstanden van de koppelbrandpunten tot de lens a en b en de hoofdbrandpuntsafstand f, dan is

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}; \qquad \text{(3)}$$

dit is dezelfde formule als bij spiegels [form. (2)]. Hieruit volgt, dat, als $a = b$, $a = b = 2f$. Lichtstralen, die uitgaan van een punt, op de

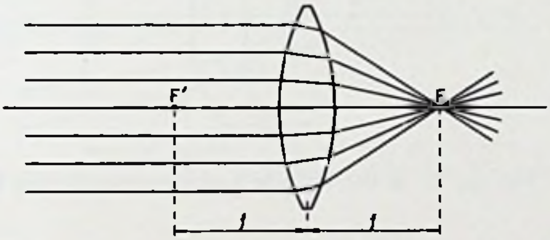


Fig. 32. Lichtstralen, die evenwijdig aan de hoofdas op een bolle lens vallen, gaan na breking door het hoofdbrandpunt F.

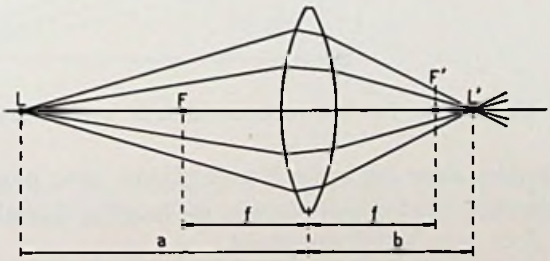


Fig. 33. L en L' zijn elkaars koppelbrandpunten.

dubbele brandpuntsafstand van de lens, komen dus weer samen in een punt, dat ook op de dubbele brandpuntsafstand van de lens ligt. Hoe verder het lichtend punt van de lens ligt, des te dichter ligt zijn koppelbrandpunt bij de lens.

Lichtstralen, die uitgaan van een punt L op de hoofdas, dat dichter bij de lens ligt dan het hoofdbrandpunt, worden zo gebroken, dat de uittredende stralen schijnen te komen van een punt L', dat verder dan het hoofdbrandpunt van de lens is verwijderd (fig. 34). Hier komen in het punt L' geen lichtstralen samen; het is dus geen reëel, doch een

virtueel koppelbrandpunt; de brandpunten van fig. 32 en 33 waren reëel. Voor de afstanden tot de lens geldt nu

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Om het beeld, dat een lens geeft, te construeren, maken we gebruik van enkele bijzondere lichtstralen, op overeenkomstige wijze als we bij de spiegels hebben gedaan.

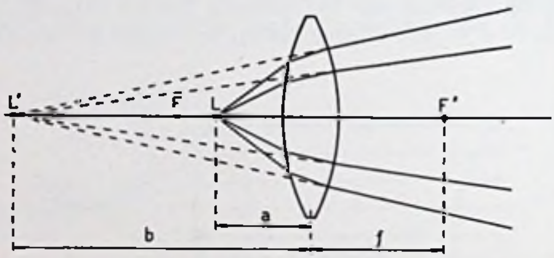


Fig. 34. L' is het virtuele koppelbrandpunt van L.

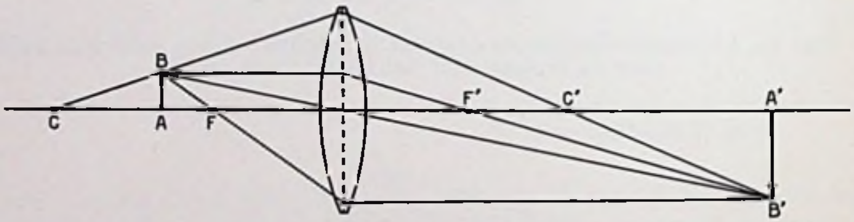


Fig. 35. Constructie van het reële beeld A'B' van het voorwerp AB.

1°. Lichtstralen door het optisch middelpunt gaan ongebroken door.

2°. Lichtstralen, die evenwijdig aan de hoofdas invallen, verkrijgen de richting door een hoofdbrandpunt.

3°. Lichtstralen, die invallen in een richting door een hoofdbrandpunt, zijn na breking evenwijdig aan de hoofdas.

4°. Lichtstralen door het punt op de hoofdas op de dubbele brandpuntsafstand gaan na breking door het andere punt op deze afstand.

In fig. 35 is het beeld B' van de pijlspits B geconstrueerd door de genoemde vier stralen te tekenen. Twee dezer stralen zijn evenwel voldoende. Uit fig. 35 blijkt, dat er een reëel omgekeerd vergroot beeld ontstaat, en daar de lichtstraal door het optisch middelpunt ongebroken doorgaat, is de verhouding van de grootten van voorwerp en beeld gelijk aan de verhouding van hun afstanden tot de lens. Dit beeld is reëel, dus kan op een scherm worden opgevangen, hetgeen

met de virtuele beelden niet het geval is. In fig. 36 is het beeld geconstrueerd van een pijl AB, die zich bevindt tussen een hoofdbrandpunt en de lens. Er ontstaat een vergroot virtueel beeld, dat niet op een scherm kan worden opgevangen, maar wel kan worden gezien. Tevens blijkt, dat de sterkste vergroting wordt verkregen als het voorwerp juist voorbij het brandpunt staat.

Evenals bij een holle spiegel treedt bij een bolle lens sferische aberratie op. Hoe groter de hoek is, die de lichtstralen maken met de

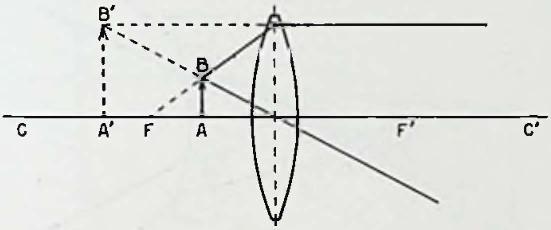


Fig. 36. Constructie van het virtuele beeld A'B' van het voorwerp AB.

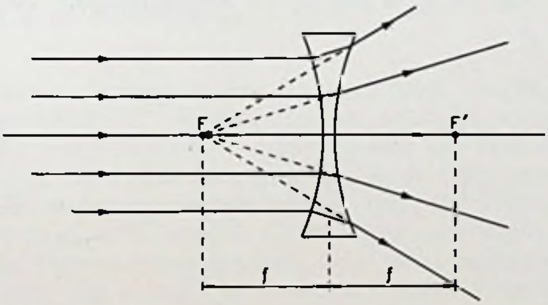


Fig. 37. Lichtstralen, die evenwijdig aan de hoofdas op een holle lens vallen, worden zo gebroken, dat ze schijnen te komen van het virtuele hoofdbrandpunt F.

hoofdas, des te meer is de sferische aberratie storend; het beeld wordt onscherp. Om het beeld scherper te maken, brengt men wel een diafragma aan. Dit is een ondoorzichtige schijf met een cirkelvormige opening voor het midden van de lens, zodat alleen de stralen, die op het midden van de lens vallen en een kleine hoek met de hoofdas maken, werkzaam zijn, waardoor de sferische aberratie gering wordt. Een nadeel van een diafragma is, dat de helderheid van het beeld geringer wordt.

b. Holle lenzen

Bij een holle lens (fig. 37) worden lichtstralen, die evenwijdig aan de hoofdas invallen, zo gebroken, dat ze schijnen te komen van een

punt F, op een afstand f vóór de lens gelegen. Dit punt heet hoofdbrandpunt en is virtueel, daar in dit punt geen lichtstralen samenkomen. Aan de andere zijde ligt eveneens een virtueel hoofdbrandpunt F′, op dezelfde afstand f van de lens.

Lichtstralen, die van een punt L op de hoofdas uitgaan, schijnen na breking afkomstig van een virtueel koppenbrandpunt L′, dat ligt tussen het hoofdbrandpunt en de lens (fig. 38).

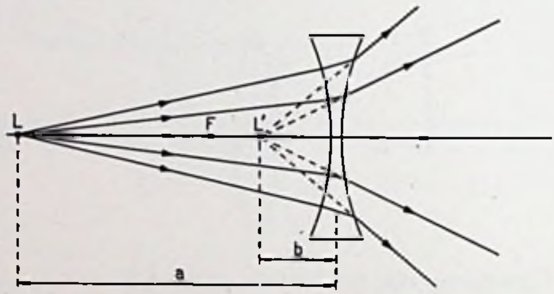


Fig. 38. L′ is het virtuele koppelbrandpunt van L.

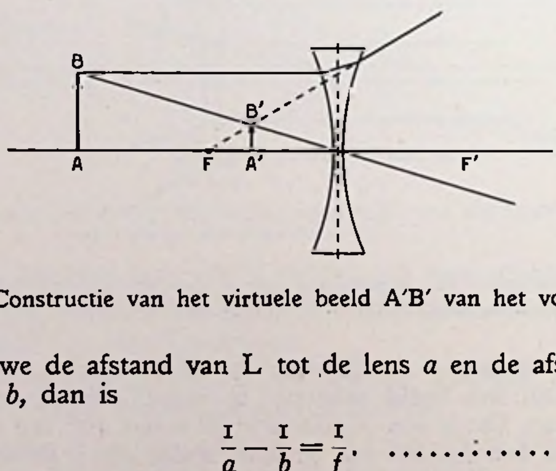


Fig. 39. Constructie van het virtuele beeld A′B′ van het voorwerp AB.

Noemen we de afstand van L tot de lens a en de afstand van L′ tot de lens b, dan is

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{f}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

De constructie der beelden bij holle lenzen voeren we uit met de lichtstralen, bij de bolle lenzen genoemd onder 1e, 2e en 3e. Fig. 39 geeft hiervan een voorbeeld. Steeds ontstaat een verkleind, rechtopstaand, virtueel beeld tussen het hoofdbrandpunt en de lens, aan dezelfde zijde van de lens als waar zich het voorwerp bevindt.

Ook bij holle lenzen treedt sferische aberratie op, die storend werkt, als de hoek tussen de invallende stralen en de hoofdas niet klein is.

6. Kleurschifting

Laten we het zonlicht door een nauwe spleet op een glazen prisma vallen, zoals in fig. 40 is aangegeven, en laten we de gebroken lichtstraal op een wit scherm vallen, dan zien we, dat het witte zonlicht is ontleed in licht van verschillende kleur, zoals we in een regenboog waarnemen. Hoewel de kleuren geleidelijk in elkaar overgaan, worden

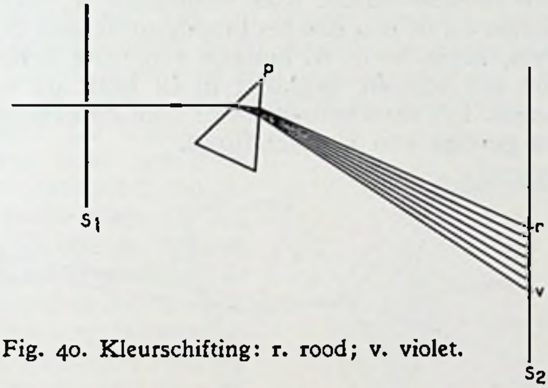


Fig. 40. Kleurschifting: r. rood; v. violet.

gewoonlijk zeven kleuren onderscheiden: rood, oranje, geel, groen, blauw, indigo en violet. Dit ontleden van het licht noemen we kleurschifting. Het witte zonlicht is samengesteld uit verschillende lichtsoorten, waarvan de golflengten en dus ook de frequenties verschillen (zie fig. 1). De voortplantingssnelheid is voor alle kleuren in vacuum en ook practisch in lucht dezelfde. In andere middenstoffen, zoals water en glas, is de voortplantingssnelheid voor de rode stralen groter dan voor de violette. Het verschil in voortplantingssnelheid in lucht en in glas is dus voor de rode stralen geringer dan voor de violette. Daardoor worden de rode stralen bij de overgang van lucht in glas minder gebroken dan de violette (vergelijk fig. 22) en ontstaat de in fig. 40 aangegeven kleurschifting.

De hoek, waarover een lichtstraal door een glazen prisma wordt afgebogen, hangt af van de brekende hoek en van de glassoort, waarvan het prisma is vervaardigd. Door een combinatie van twee prisma's van verschillende glassoorten kan, door een juiste keuze van de brekende hoek, worden bereikt, dat de kleurschifting wordt opgeheven, doch breking blijft bestaan (fig. 41) óf dat de breking wordt opgeheven en de lichtstralen in dezelfde richting uittreden als ze op het samengestelde prisma vallen, doch de kleurschifting blijft bestaan (fig. 42). De eerstgenoemde combinatie noemen we een *achromatisch* prisma; de laatstgenoemde een *rechtziend* prisma. Bij een achromatisch prisma kan de chromatische aberratie worden opgeheven bv. voor de rode en de violette stralen; voor de tussengelegen kleuren blijft echter

nog enige invloed van deze aberratie over. Bij het rechtziend prisma zijn natuurlijk niet alle uittredende stralen evenwijdig aan de invallende straal; men neemt de brekende hoeken zo, dat de groene straal, die ongeveer in het midden van het spectrum ligt, de oorspronkelijke richting verkrijgt.

Evenals bij een prisma treedt ook bij een lens kleurschifting op; de rode stralen worden minder sterk gebogen dan de violette. In fig. 43 is een bolle lens getekend, waarop een bundel wit licht evenwijdig aan de hoofdas invalt. Het brandpunt V voor de violette stralen ligt dichter bij de lens dan het brandpunt R voor de rode stralen. Op een scherm, geplaatst in A, ontstaat een witte lichtvlek met een rode rand; op een scherm, geplaatst in B, heeft de witte lichtvlek een violette rand. Dit verschijnsel noemt men chromatische aberratie (afwijking ten gevolge van kleurschifting).

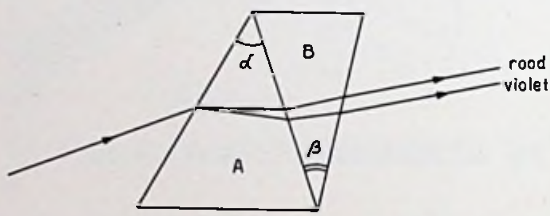


Fig. 41. Achromatisch prisma.

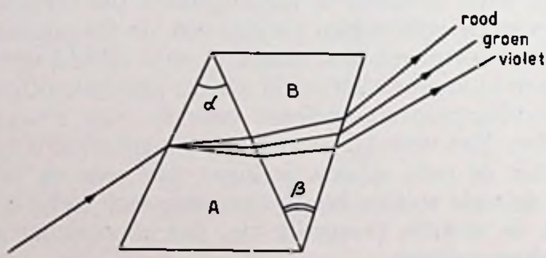


Fig. 42. Rechtziend prisma.

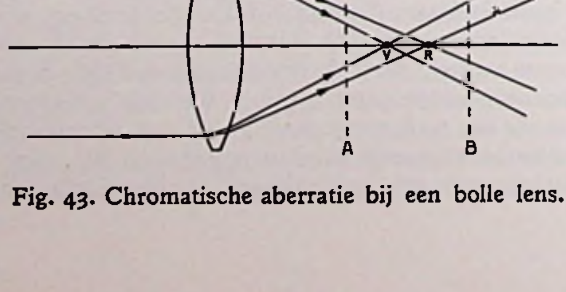


Fig. 43. Chromatische aberratie bij een bolle lens.

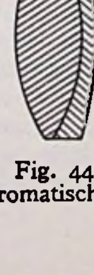


Fig. 44. Achromatische lens

Op overeenkomstige wijze als bij prisma's kan ook bij lenzen de chromatische aberratie vrijwel worden opgeheven, door een holle lens te combineren met een bolle (fig. 44). De glassoorten zijn daarbij voor beide lenzen verschillend.

7. Optische instrumenten

a. Het oog

Een door de natuur gegeven optisch instrument is het oog. Fig. 45 geeft een doorsnede aan. Van een verlicht voorwerp gaan lichtstralen uit, die door een diafragma, pupil genaamd, het oog binnendringen. De diameter van de pupil past zich onwillekeurig aan de sterkte van het licht aan; bij sterke verlichting is de pupil klein; bij zwakke verlichting groot. De lichtstralen gaan vervolgens door een bolle lens, die een verkleind, omgekeerd, reëel beeld vormt op het netvlies. Onwillekeurige spieren werken op de lens, waardoor de brandpuntsafstand zo wordt ingesteld, dat het beeld op het netvlies scherp is. De oogzenuw, waarvan de vertakkingen in het netvlies eindigen, brengt de gewaarwordingen naar de hersenen over en wij zien. Het vermogen van het normale oog om de brandpuntsafstand van de lens juist in te stellen, noemen we het accomodatievermogen. Is het accomodatievermogen onvoldoende, dan kan een bril uitkomst geven.

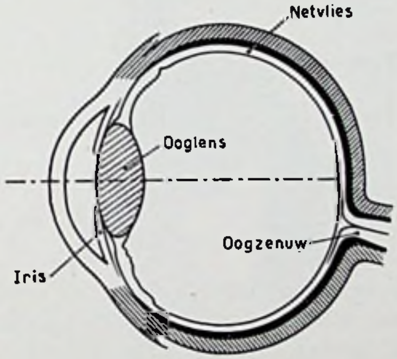


Fig. 45. Doorsnede door het oog.

b. De bril

Op oudere leeftijd treedt veelvuldig het verschijnsel op, dat de lens van het oog wel scherpe beelden geeft van voorwerpen op grote afstand, doch de kromming van het oppervlak van de lens niet meer voldoende kan worden gemaakt om voorwerpen dichtbij duidelijk te zien. Een bril met bolle glazen kan bij een dergelijk *verziend* oog hulp bieden. Bij een *bijziend* oog kan de lens niet plat genoeg worden gemaakt om voorwerpen op grote afstand duidelijk waar te nemen. In dit geval heeft men een bril met holle glazen nodig.

De sterkte van de lens wordt aangegeven door $\frac{1}{f}$, waarbij f de brandpuntsafstand in m is. Voor een bolle lens rekent men f positief, voor een holle lens negatief. De sterkte van een brilleglas wordt uitgedrukt in *dioptrieën,* waarbij 1 dioptrie wordt toegekend aan een bolle lens met een brandpuntsafstand van 1 m. Het aantal dioptrieën van

een lens met een brandpuntsafstand van 25 cm is dan $\frac{1}{0{,}25} = +4$, terwijl dit voor een holle lens met een brandpuntsafstand van 25 cm $\frac{1}{f} = \frac{1}{-0{,}25} = -4$ is. Deze wijze van aanduiding is ingevoerd door Donders (Nederlands oogheelkundige, 1818—1889).

c. Het fototoestel

In een fototoestel (fig. 46) wordt door een bolle lens L een reëel, omgekeerd, verkleind beeld gevormd op de lichtgevoelige plaat P. Daar de plaats van dit beeld A'B' ten opzichte van de lens afhankelijk is van de afstand van het af te beelden voorwerp AB, kan de lens

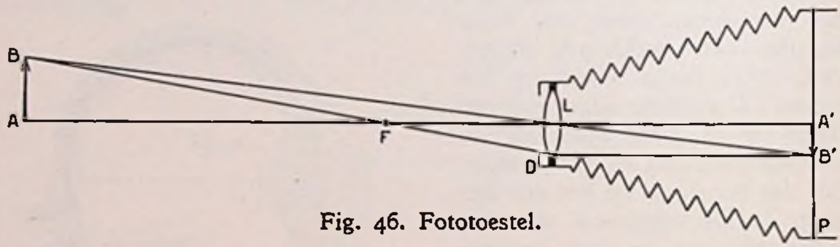


Fig. 46. Fototoestel.

ten opzichte van de plaat worden verschoven, tot het beeld op de plaat scherp is. De lens is achromatisch. Om de sferische aberratie niet groter te doen zijn dan onvermijdelijk is, is vóór de lens een instelbaar diafragma D geplaatst. Bij grote helderheid van het te fotograferen voorwerp wordt de opening van het diafragma klein genomen; in ieder geval niet groter dan nodig is om de gevoelige plaat voldoende te verlichten. Dan verkrijgt men de scherpste afbeelding, die in de gegeven omstandigheden mogelijk is.

d. De loupe

Een loupe is een kleine bolle lens met een kleine brandpuntsafstand (bv. 2,5 cm). We plaatsen de lens vlak voor ons oog en plaatsen het voorwerp, dat we vergroot wensen te zien, op een zodanige plaats, dat we een vergroot, rechtopstaand, virtueel beeld waarnemen op de afstand van duidelijk zien (ca 25 cm) (zie fig. 36). Daar we hiertoe het voorwerp een weinig minder dan de brandpuntsafstand van de lens moeten plaatsen en de vergroting evenredig is met de verhouding van de afstanden van beeld en voorwerp tot de lens, geeft een lens met de kleinste brandpuntsafstand de sterkste vergroting.

e. De microscoop

De microscoop is in 1590 uitgevonden door Zacharias Jansen (brillenslijper te Middelburg). Een klein voorwerp AB (fig. 47) wordt een weinig verder dan brandpuntsafstand van een bolle lens L_1

geplaatst. Er vormt zich een vergroot, omgekeerd, reëel beeld A'B'. Dit beeld wordt bekeken met de lens L_2 als loupe; we zien een vergroot virtueel beeld A"B". Zoals uit fig. 47 blijkt, is de vergroting gelijk aan het product van de vergrotingen, die ieder der lenzen geeft, bv. totaal 1000 ×. De lens L_1 wordt voorwerpglas of *objectief* genoemd; de lens L_2 oogglas of *oculair*. Fig. 48 geeft een afbeelding van een microscoop.

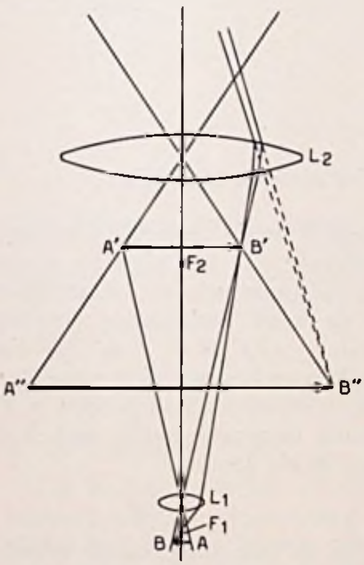


Fig. 47. Gang der lichtstralen in een microscoop.



Fig. 48. Microscoop.

f. De astronomische kijker

De astronomische kijker vertoont, wat de lenzen betreft, grote overeenkomst met de microscoop. Ook deze bevat een objectief, waarmee een reëel beeld wordt gevormd van het voorwerp, dat we wensen waar te nemen, en een oculair, waarmee dit beeld wordt bekeken als met een loupe. Het principiële verschil is, dat bij de microscoop het voorwerp zich iets verder dan brandpuntsafstand van het objectief bevindt, terwijl bij de astronomische kijker het voorwerp zich op zeer grote afstand bevindt.

De gang der lichtstralen is in fig. 49 aangegeven. De lichtstralen vallen bijna evenwijdig aan de hoofdas in; het reële beeld A'B' wordt dus gevormd iets verder dan het brandpunt F van het objectief L_1 verwijderd. Het brandpunt van het oculair L_2 moet iets verder van L_2 verwijderd zijn dan het beeld A'B', zodat de brandpunten der

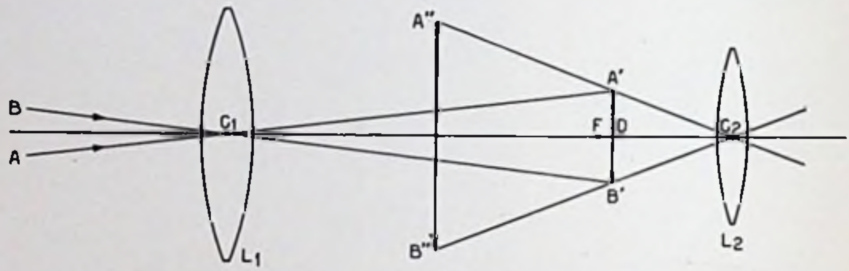


Fig. 49. Gang der lichtstralen in een astronomische kijker.

beide lenzen vrijwel samenvallen (het punt F in fig. 49). We zien het virtuele beeld A''B''. Dit beeld is wel kleiner dan het zich op grote afstand bevindende voorwerp AB, doch de gezichtshoek, waaronder we het beeld zien, is veel groter dan de hoek, waaronder we het voorwerp zien. We zien het voorwerp onder $\angle AC_1B = \angle A'C_1B'$ en het beeld onder de hoek $A'C_2B'$. Deze hoeken verhouden zich ongeveer als C_1D tot C_2D. Daar D vlak bij het gemeenschappelijke brandpunt F ligt, is de vergroting van de gezichtshoek ongeveer gelijk aan het quotiënt van de brandpuntsafstanden der beide lenzen.

g. De aardse verrekijker

Met de astronomische kijker verkrijgen we een omgekeerd beeld. Voor astronomische waarnemingen is dit geen overwegend bezwaar; wanneer we echter een ver verwijderd voorwerp op aarde waarnemen, dan wensen we een rechtopstaand beeld. Tot dit doel voegen we dan nog een bolle lens toe, die het reële beeld A'B' (fig. 49) omkeert, zonder dat hierbij het beeld wordt vergroot. Dan hebben we de aardse verrekijker volgens fig. 50 verkregen. Het beeld A'B' wordt evenals in fig. 49 gevormd iets verder dan het brandpunt F_1 van het objectief L_1. De lens L_2 wordt zo geplaatst, dat het beeld A'B' zich op tweemaal de brandpuntsafstand van de lens L_2 van deze lens bevindt. Het reële, rechtopstaande beeld A''B'' wordt gevormd even ver achter L_2 als A'B' zich voor deze lens bevindt. De brandpunten van de lens L_2 zijn F_2 en F_2'. Het beeld A''B'' bevindt zich weer even binnen brandpuntsafstand voor het oculair L_3, zodat we het rechtopstaande beeld A'''B''' verkrijgen.

Door de lens L_2 wordt de kijker viermaal de brandpuntsafstand van deze lens langer. Soms worden in de plaats van de lens L_2 twee gelijke

lenzen gebruikt, die in elkaars brandpunt staan. Daardoor wordt de kijker korter: de beide lenzen vereisen slechts een lengtevermeerdering van driemaal de brandpuntsafstand. Hiervan kan men zich gemakkelijk overtuigen door het lenzenstelsel met de gang van de lichtstralen te tekenen.

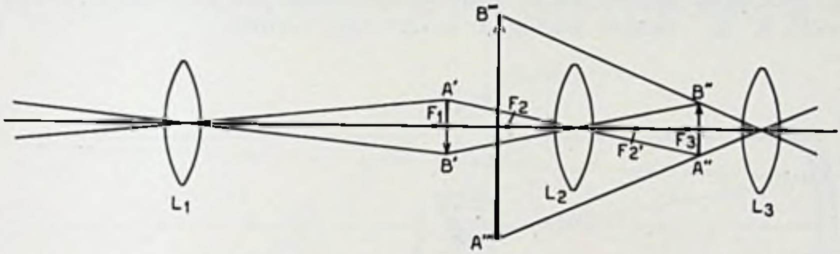


Fig. 50. Aardse verrekijker.

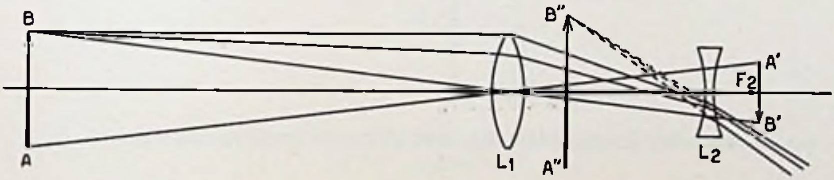


Fig. 51. Hollandse kijker.

h. De Hollandse kijker

De Hollandse kijker wordt ook wel de kijker van Galileï (Italiaans natuurkundige, 1564—1642) genoemd. De uitvinding wordt door sommigen toegeschreven aan Zacharias Jansen (Middelburg), door anderen aan Galileï. Deze kijker bestaat uit een bolle lens als objectief en een holle lens als oculair. De stralengang is in fig. 51 aangegeven. Was de holle lens L_2 niet aanwezig, dan zou het reële, omgekeerde beeld A'B' worden gevormd. De lens L_2 breekt de lichtstralen echter zo, dat ze divergerend worden. Een rechts van L_2 geplaatst oog ziet dan het virtuele, rechtopstaande beeld A''B''. De plaats van de lens L_2 is zo, dat het beeld A'B', indien het gevormd kon worden, iets verder ligt dan het brandpunt F_2 van deze lens.

De bekende binocle of toneelkijker bestaat uit twee aan elkaar verbonden dergelijke kijkers.

i. De spiegeltelescoop

Bij de spiegeltelescoop wordt in plaats van de objectieflens een holle spiegel gebruikt. In fig. 52 en 53 is voor twee verschillende uitvoeringsvormen de stralengang aangegeven. In fig. 52 zou door de holle spiegel S_1 van een ver verwijderd voorwerp een omgekeerd reëel beeld

A'B' worden gevormd, indien de vlakke spiegel S_2 niet aanwezig was. Deze laatste spiegel maakt een hoek van 45° met de as van de kijker, zodat het reële beeld A''B'' wordt gevormd. Dit beeld wordt, evenals bv. bij de astronomische kijker, door de bolle lens L_2 als oculair bekeken. De spiegel S_2 is zo klein, dat slechts een klein deel der op S_1 invallende stralen wordt onderschept, zodat het verkregen virtuele beeld A'''B''' slechts weinig in lichtsterkte verliest.

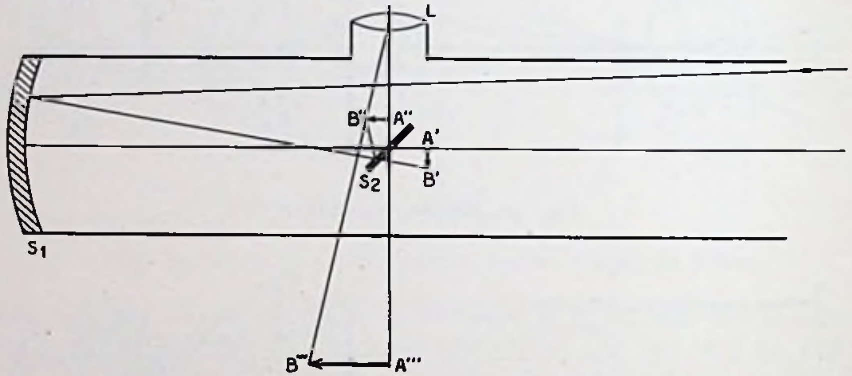


Fig. 52. Spiegeltelescoop met zijwaarts geplaatst oculair.

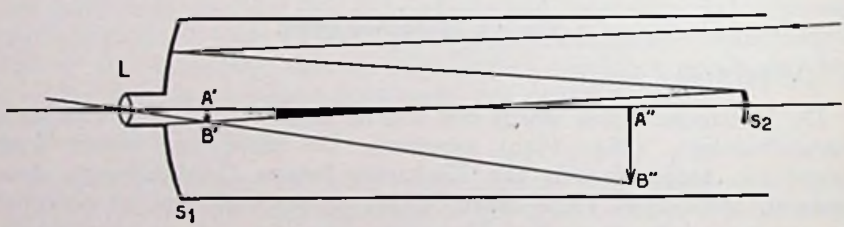


Fig. 53. Spiegeltelescoop met het oculair in de as van de kijker.

In fig. 53 treffen de door de spiegel S_1 teruggekaatste stralen de kleine holle spiegel S_2, zodat een omgekeerd reëel beeld A'B' wordt gevormd, dat door het oculair L wordt bekeken, waarbij het virtuele beeld A''B'' ontstaat. De spiegel S_1 heeft daartoe in het midden een ronde opening.

Evenals bij andere kijkers is ook bij de spiegeltelescoop de vergroting van de gezichtshoek gelijk aan de verhouding van de brandpuntsafstanden van objectief en oculair.

j. De regenboog

Valt een zonnestraal in een regendruppel, dan vindt straalbreking en kleurschifting plaats, zoals in fig. 54 op zeer overdreven wijze is

aangegeven. De uittredende rode stralen (r) maken de grootste, de violette stralen (v) de kleinste hoek met de horizon. We zien dus het rood boven, het violet beneden. Stellen we de brekingsindex voor water voor de rode stralen $n = {}^4/_3$, dan kunnen we berekenen, dat $\angle$ ZAr $= 42°$. Treft nu de rode straal ons oog en trekken we door ons oog O een lijn OM evenwijdig aan de zonnestraal (fig. 55), dan

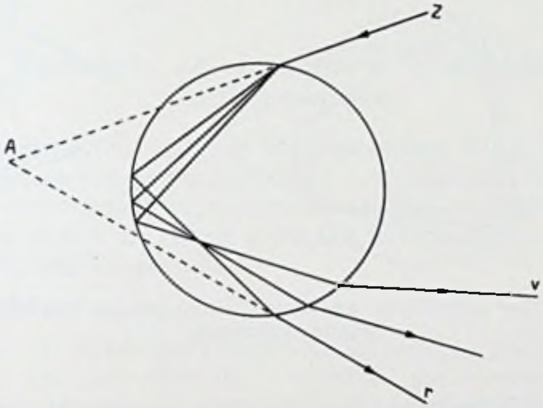


Fig. 54. Gang der lichtstralen en kleurschifting in een regendruppel van de eerste regenboog.

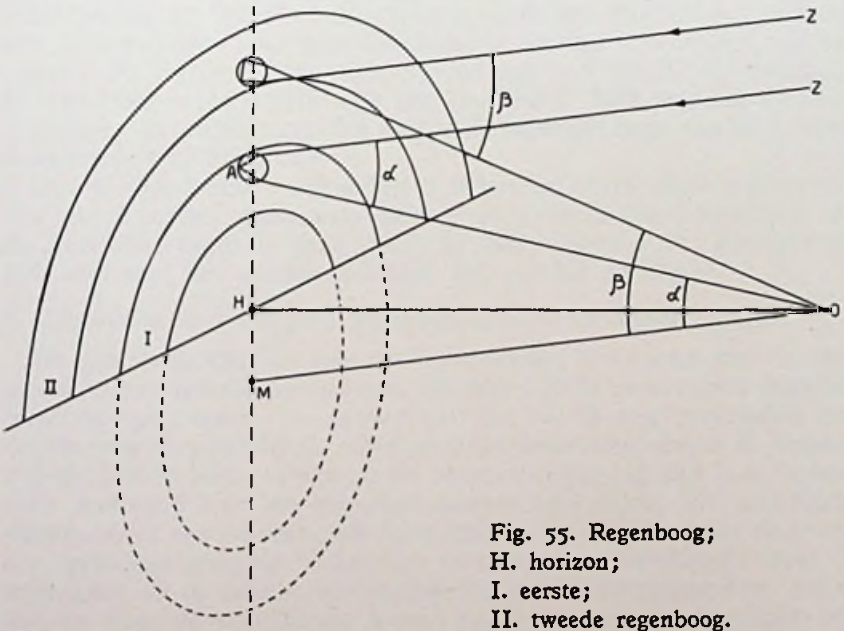


Fig. 55. Regenboog;
H. horizon;
I. eerste;
II. tweede regenboog.

is $\angle$ AOM ook 42°. Het punt M is dus het middelpunt van de regenboog; voor de violette stralen zijn de genoemde hoeken iets kleiner, nl. ruim 40°. We zien dus in de regenboog het rood boven en het violet beneden. Uit fig. 55 volgt, dat we bij zonsondergang de regenboog zien als een halve cirkel; staat de zon hoger aan de hemel, dan is de regenboog kleiner.

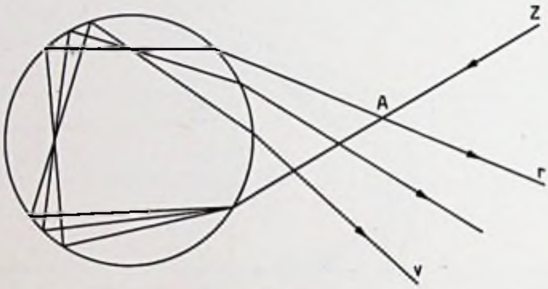


Fig. 56. Gang der lichtstralen en kleurschifting in een regendruppel van de tweede regenboog.

Soms zien we boven deze regenboog nog een tweede, met de kleuren in omgekeerde volgorde. De stralengang in de regendruppel is dan zoals in fig. 56 is aangegeven. Hierbij is $\angle$ ZAr = 51°; voor de violette stralen is de overeenkomstige hoek ruim 54°.

IX. ELECTRICITEIT EN MAGNETISME

1. Electrische en magnetische verschijnselen en toepassingen

In het dagelijks leven en in de techniek maken we op velerlei gebied gebruik van electrische en magnetische verschijnselen. Eerst beschouwen we de voornaamste verschijnselen en hun practische toepassing, om daarna te komen tot enkele algemene wetten, die uit de verschijnselen kunnen worden afgeleid.

a. De electrische gloeilamp

Voor huis- en straatverlichting, voor rijwiel- en autoverlichting, in zaklantaarns enz. gebruiken we electrische gloeilampen. Voor iedere toepassing nemen we een lamp van zodanige grootte (lichtsterkte) en voor zodanige spanning als voor het doel het meest geschikt is. In de gloeilamp wordt een metalen draad door de electrische stroom tot gloeien gebracht, zodra de lamp met een schakelaar S wordt ingeschakeld (fig. 1). Om een helder licht te verkrijgen moet de temperatuur van de draad zeer hoog zijn. De draad is daarom vervaardigd van een metaal, dat bij deze hoge temperatuur nog niet smelt, nl. wolfraam. Edison (1847—1937) gebruikte een kooldraad, doch thans is de kooldraadlamp in onbruik geraakt, omdat de lichtopbrengst van de metaaldraadlamp veel beter is.

Om de draad voor verbranden te behoeden wordt deze geplaatst in een glazen ballon, waaruit de lucht is verwijderd. Om verdampen van de gloeidraad tegen te gaan wordt de ballon gevuld met een gas, dat zich niet met het metaal verbindt, bv. stikstof en argon.

b. Electrische verbindingen; spanning, stroom, vermogen, energie

De gloeilamp van fig. 1 is met twee draden verbonden met de twee geleiders van het electriciteitsnet, dat ook andere verbruikers (lampen, motoren enz.) voedt. De draden van dit net N zijn verbonden met de electrische centrale C, waar zich de electriciteitsbron B bevindt (fig. 2). Beschouwen we een enkele verbruiker (fig. 3), dan is deze door twee leidingen met de electriciteitsbron verbonden. De electrische stroom moet een doorlopende baan vinden om van de bron door een der geleiders naar de verbruiker te vloeien en vervolgens door de verbruiker en de andere verbindingsdraad naar de stroombron terug, om, na door de stroombron te zijn gevloeid, wederom dezelfde weg

te nemen. De electrische stroom kan alleen vloeien, als er een gesloten geleidende baan aanwezig is, waarin een „electriciteitsbron" is opgenomen, die de electrische stroom doet rondlopen. De leidingen bestaan gewoonlijk uit draden van koper, daar dit metaal de electrische stroom bijzonder goed geleidt. De naast elkaar liggende draden zijn van elkaar *geïsoleerd* door niet-metallische stoffen, bv. rubber of plastiek.

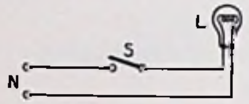


Fig. 1. Electrische gloeilamp L met schakelaar S, verbonden met het lichtnet N.

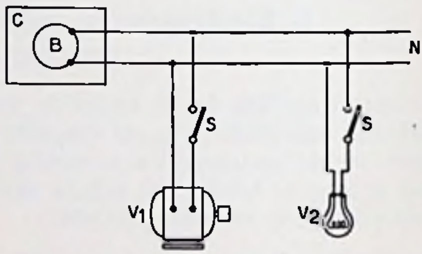


Fig. 2. Electrische centrale C met electriciteitsbron B, het net N en als verbruikers een electromotor V_1 en een gloeilamp V_2.

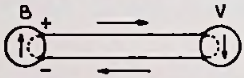


Fig. 3. Electriciteitsbron B met verbruiker V. Er vloeit alleen stroom door een gesloten keten; er zijn dus een heen- en een terugleiding vereist. De pijlen geven de stroomrichting aan.

Hierdoor wordt de directe stroomovergang van de ene geleider naar de andere voorkomen (*kortsluiting*) en krijgt men geen electrische schok bij het aanraken der draden.

Het verbruiksapparaat, bv. een gloeilamp, moet aangepast zijn aan de electriciteitsbron. Op iedere gloeilamp is de vereiste *spanning* aangegeven. Voor een kleine staafbatterij gebruikt men een lampje van 2,5 volt (afgekort V), voor een zaklamp een van 3,5 V, voor fiets- en autoverlichting gewoonlijk 6 V, terwijl het lichtnet in Europa in de meeste plaatsen een 220 V-net is. Ieder dezer electriciteitsbronnen, de staafbatterij, de zaklantaarnbatterij, de fietsdynamo, de auto-accumulator, kortweg auto-accu genoemd, en de electrische centrale, heeft een eigen spanning. Deze bronnen kan men dus *spanningsbronnen* noemen; daar deze bronnen electrische stroom aan de verbruiksapparaten kunnen leveren, is ook de naam *stroombronnen* gerechtvaardigd. Sluit men een apparaat, dat voor een lage spanning is bestemd, op een electriciteitsbron met een hoge spanning aan, dan vloeit door het apparaat een te sterke stroom, waardoor dit kan worden beschadigd of vernield. Sluit men bv. een lampje van 3,5 V op een auto-accu van 6 V aan, dan straalt het een buitengewoon sterk licht uit, maar brandt na korte tijd door, dat wil zeggen de gloeidraad smelt door. Omgekeerd lijdt een apparaat, bestemd voor een hogere spanning, geen schade, als dit op een lagere spanning wordt aangesloten, doch het levert dan niet de bedoelde prestatie. Zo zal een 6 V-lampje,

aangesloten op een zaklantaarnbatterij, slechts zwak, donkerrood of in het geheel niet gloeien.

Een tweede kenmerk van een verbruiksapparaat is de vereiste *stroom*. Deze wordt uitgedrukt in ampère (afgekort A). Een lampje, waarop aangegeven staat 3,5 V 0,2 A laat een zakbatterij langer meegaan dan een lampje voor 3,5 V 0,3 A. Dit laatste lampje geeft echter bij een verse batterij meer licht. Vergelijken we lampen voor dezelfde spanning, doch voor verschillende stroom met elkaar, dan blijkt, dat de gloeidraad het dikst is bij de lamp voor de grootste stroom, terwijl de lengten der gloeidraden niet veel verschillen. Vergelijken we lampen voor dezelfde stroom, doch verschillende spanning, dan blijkt, dat de gloeidraden even dik zijn, doch dat de lampen voor een hogere spanning een langere gloeidraad bezitten.

De lichtsterkten der verschillende lampen lopen sterk uiteen. Men kan evenwel eenzelfde hoeveelheid licht verkrijgen met een lamp met een lange, dunne gloeidraad als met een lamp, waarvan de gloeidraad kort en dik is. Dit kan worden bereikt door de temperatuur van de gloeidraden gelijk te maken en de afmetingen zo te kiezen, dat het lichtuitstralend oppervlak in beide gevallen even groot is. Daartoe moeten we de lange dunne gloeidraad aansluiten aan een hogere spanning dan de korte dikke. De stroom die daarbij door de korte dikke gloeidraad vloeit, is echter in de verhouding van de doorsneden groter dan die door de lange dunne.

Als maat voor de met behulp van electriciteit te verrichten prestaties neemt men het product van de optredende stroom, en de spanning, waarop het verbruiksapparaat is aangesloten. Dit product noemt men het *vermogen;* het wordt uitgedrukt in voltampère (VA) of watt (W). Bij gloeilampen wordt gewoonlijk aangegeven de spanning, waarvoor zij zijn bestemd, en niet de stroom, maar het vermogen, dat zij opnemen (bv. 25, 40, 60, 100, 150 W) en verder de hoeveelheid licht, die wordt uitgestraald, uitgedrukt in lumen (zie hfdst. VIII). Inderdaad blijkt, dat lampen voor eenzelfde vermogen ongeveer dezelfde hoeveelheid licht geven. Zo levert bv. een Philips-lamp voor 110 V 150 W een lichtstroom van 2340 lumen, en een dergelijke lamp voor 220 V 150 W een lichtstroom van 2100 lumen.

Om het electriciteitsverbruik te bepalen, moet de tijd, gedurende welke een bepaald electrisch vermogen werkzaam is, in aanmerking worden genomen. Iemand, die een lamp van 75 W twee uur laat branden, verbruikt tweemaal zoveel als iemand, die een dergelijke lamp slechts één uur inschakelt. Ook verbruikt iemand, die een lamp van 150 W één uur laat branden, tweemaal zoveel als iemand, die een lamp van 75 W één uur gebruikt. Het product van het vermogen en de tijd is dus een deugdelijke maat voor het electriciteitsverbruik. Zoals we in hfdst. VI hebben gezien, is het product van een vermogen en een tijd een *energie,* die we uitdrukken in wattsecunden (Wsec) of joules (J). Voor de practijk is in vele gevallen 1 joule een wel wat kleine maat; men gebruikt dan als eenheid de kilowattuur (afgekort

kWh). Dit is de energie, die een verbruiker opneemt, die een vermogen van 1000 watt gedurende 1 uur verbruikt. De electriciteitsbedrijven berekenen de verbruikte electrische energie per kWh. Deze energie wordt opgewekt in de electrische centrales, waar, althans in ons land, steenkool als brandstof, dus als energiebron, dient. De verbruikte hoeveelheid steenkool is, althans in eerste benadering, evenredig met het aantal kWh geleverde electrische energie, onverschillig hoe deze energie als product van de drie factoren spanning, stroom en tijd is samengesteld.

c. *Gasontladingslampen*

De electrische gloeilamp zet slechts een klein gedeelte van de toegevoerde electrische energie in zichtbaar licht om; het grootste gedeelte gaat als warmte verloren. In dit opzicht zijn gasontladingslampen beter.

Voor straatverlichting worden natrium- en kwiklampen gebruikt; deze laatste ook voor schijnwerpers en in bioscoopprojectoren. Voor reclameverlichling worden lampen met verschillende andere gas- of dampvullingen gebruikt. De kleur van het licht hangt af van het gas, waarmee het glazen omhulsel is gevuld. Bij de fluorescentielampen is de glazen buis aan de binnenzijde met een fluorescerende stof bedekt, die lichtgevend wordt onder invloed van de op zichzelf onzichtbare ultraviolette straling van de gasontlading in de buis. Voor zeer geringe lichtsterkten dienen glimlampen, waarbij de stroom zeer klein is.

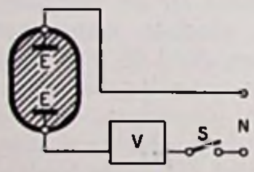


Fig. 4. Gasontladingslamp met voorschakelapparaat V; in de lamp bevinden zich de electroden E. N. net; S. schakelaar.

Al deze lampen bestaan uit een glazen buis, waarin zich twee metalen draden of platen E bevinden, electroden genoemd, waarvan de aansluitingen door de glaswand naar buiten zijn gevoerd (fig. 4). De lucht is uit de buis verwijderd en vervangen door een ander gas of damp. De beide electroden worden met het net verbonden, waarbij in een der leidingen een voorschakelapparaat V is opgenomen. Wordt de lamp met de schakelaar S ingeschakeld, dan worden de gasmoleculen of -atomen geïoniseerd, dat wil zeggen worden gesplitst in electrisch geladen ionen en electronen, die als dragers van de electriciteit kunnen worden beschouwd. Deze geladen deeltjes bewegen zich door de buis en veroorzaken daarmee een electrische stroom door de buis, die een *gasontlading* wordt genoemd. Hierbij ontstaat licht; het verschijnsel gaat gepaard met een geringe warmte-ontwikkeling. Bij verschillende typen gasontladingslampen moet de ontlading op gang worden gebracht. Dit noemt men ontsteken.

Vergelijken we een gasontladingslamp met een gloeilamp, dan bemerken we, dat de gasontladingslamp vrij koud blijft; we kunnen de brandende lamp met de blote hand aanvatten, terwijl een gloeilamp vrij heet wordt. Het is dus een groot voordeel van de gasontladingslamp,

dat het toegevoerde electrische vermogen voor een veel groter deel in licht wordt omgezet dan bij de gloeilamp en dus een kleiner deel als warmte voor het beoogde doel verloren gaat; het *rendement* is groter (onder het rendement verstaan we de verhouding van het voor ons doel beschikbaar komend vermogen en het toegevoerde vermogen).

Een ander verschil tussen beide soorten lampen is, dat een gloeilamp een geel-wit licht uitstraalt, dat door een glazen prisma in een continu spectrum kan worden ontleed (zie hfdst. VIII), terwijl een gasontladingslamp een gekleurd licht uitstraalt, dat slechts een of enkele kleuren vertoont, afhankelijk van de soort gas (kwiklampen: blauw of blauwgroen; natriumlampen: geel; neonlampen: rood). Voor reclamedoeleinden kan dit gewenst zijn; voor verlichtingsdoeleinden wenst men een meer gelijkmatige verdeling van het licht over de verschillende kleuren. Dit kan worden bereikt met de genoemde fluorescentielampen; de fluorescerende stof op de glaswand wordt getroffen door de straling van de gasontlading en zendt daardoor zelf licht uit, dat beter het gloeilampenlicht benadert.

Bij sommige gasontladingslampen, zoals de fluorescentie-buislampen, worden één of beide electroden E gevormd door gloeidraden, die door de electrische stroom worden verhit; hierdoor ontsteken deze lampen gemakkelijker.

Een gloeilamp kan direct met het net worden verbonden (fig. 1); de gasontladingslamp vereist een voorschakelapparaat V (fig. 4), bestaande uit een weerstand of een smoorspoel en soms een (gewoonlijk automatisch werkende) ontsteekinrichting.

d. Warmte-ontwikkeling door de electrische stroom

In verschillende toestellen wordt electriciteit gebruikt om warmte op te wekken. We noemen als voorbeelden electrische strijkijzers, kachels, kookplaten, broodroosters, soldeerbouten. Ook bij de gloeilamp wordt de gloeidraad door de electrische stroom verhit, tot de temperatuur zo hoog is geworden, dat licht wordt uitgestraald. Bij de juist genoemde toestellen wordt echter de temperatuur niet zo hoog; de draden, waar de stroom door vloeit, worden hoogstens roodgloeiend. Deze draden zijn gewoonlijk vervaardigd van chroomnikkel, een materiaal, dat bij de optredende temperatuur nog niet door de lucht wordt aangetast. Het behoeft daarom niet, zoals de witgloeiende wolfraamdraad van de gloeilamp, door een omhulsel van de lucht te worden afgesloten.

In de industrie wordt van de warmte-ontwikkeling door de electrische stroom gebruik gemaakt bij het electrisch lassen. Bij het puntlassen worden de twee met elkaar te verbinden metalen delen op een punt tegen elkaar gedrukt. Door dit contactpunt wordt gedurende een korte tijd een vrij grote stroom geleid, waardoor de metalen in het contactpunt tot bij het smeltpunt worden verhit en aan elkaar hechten. Wenst men twee ijzeren platen aan elkaar te verbinden, dan wordt booglassen toegepast. De beide platen worden tegen elkaar neergelegd en met

een pool van de transformator T verbonden (fig. 5). De andere pool van de transformator is verbonden met een lasstaaf L. De transformator verkrijgt zijn energie uit het net. De lasstaaf bestaat uit ijzer, waaraan nog enkele andere stoffen zijn toegevoegd. De staaf wordt met de te lassen naad in contact gebracht, waardoor een grote electrische stroom optreedt. De staaf wordt vervolgens een weinig van de ijzeren platen verwijderd en er ontstaat een sterk lichtende boog A tussen de staaf en de lasnaad. De staaf smelt geleidelijk af; het gesmolten

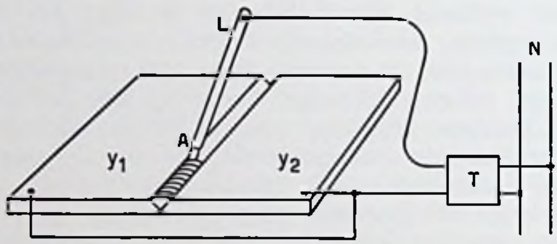


Fig. 5. Electrisch booglassen. Y_1 en Y_2. de aan elkaar te lassen ijzeren platen; L. lasstaaf; A. lichtboog; T. lastransformator; N. electriciteitsnet.

ijzer valt in de sterk verhitte naad en vormt de verbinding tussen de beide platen. De verbindingsdraden worden niet rechtstreeks op het net aangesloten, doch verbonden met een lastransformator T, die op zijn beurt met het net is verbonden. Deze transformator bewerkt, dat de spanning aan de lichtboog laag is (de netspanning zou veel te hoog zijn) en dat bovendien de stroom, die het net moet leveren, veel kleiner is dan de stroom door de lasboog. Het net levert dus een hoge spanning en een kleine stroom, terwijl de lasboog een lage spanning en een grote stroom vraagt. Hierbij is het product van de spanning en de stroom, die het net levert, dus het vermogen, dat het net levert, bij benadering gelijk is aan het product van de stroom en de spanning, dus het vermogen, dat voor het lassen nodig is.

In hfdst. VI en VII is reeds gebleken, dat warmte een vorm van energie is en dat energie van de ene vorm in een andere kan worden omgezet, doch niet verdwijnt en ook niet „uit niets" ontstaat. We hebben hier gezien, dat de electrische stroom warmte en licht kan opwekken; electrische energie kan dus in andere vormen van energie worden omgezet. Omgekeerd kunnen warmte, licht en mechanische energie worden omgezet in electrische energie, zoals nog nader zal blijken.

e. Het opwekken van mechanische krachten en het verrichten van mechanische arbeid met behulp van electrische stromen

Met behulp van een electromotor kunnen we door middel van electriciteit mechanische krachten opwekken en mechanische arbeid

verrichten. In de huishouding treffen we een electromotor aan in de stofzuiger, de electrische klok, het scheerapparaat, de wasmachine, de gramofoon. Verder worden electromotoren gebruikt voor de aandrijving van trams en treinen en allerlei machines in fabrieken, en als startmotor voor auto's.

De werking van de electromotor berust op het feit, dat op een draad, waardoor een stroom vloeit, een mechanische kracht wordt uitgeoefend, wanneer deze draad zich in de nabijheid van een magneet bevindt. De omgeving van de magneet, waar zijn werking merkbaar is, noemen we het magnetische veld. Alleen bij zeer kleine motoren wordt dit magnetische veld opgewekt door een stalen magneet, een zg. permanente magneet. In alle andere gevallen wordt het verkregen met behulp van een electrische stroom.

Hiertoe laat men de stroom door geïsoleerde draden vloeien, die gewonden zijn om in de motor aangebrachte ijzeren kernen. Deze ijzeren kernen worden hierdoor gemagnetiseerd; men noemt ze electromagneten; zij gedragen zich op dezelfde wijze als staalmagneten, zolang de stroom om de kernen vloeit.

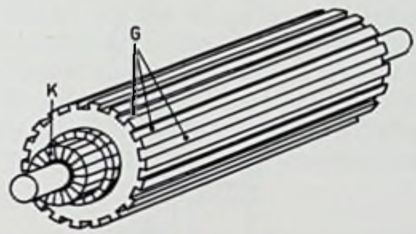


Fig. 6. Rotor van een gelijkstroommotor. In de gleuven G worden geïsoleerde draden gewikkeld, die met de lamellen van de commutator K worden verbonden. De stroomtoevoer tot deze draden geschiedt door vaststaande koolborstels, die verend op de commutator K drukken. K bestaat uit van elkaar en van de as geïsoleerde koperen lamellen. De rotor kan op deze wijze draaien zonder dat de stroomtoevoer wordt onderbroken.

Op de as van de motor is een uit cirkelvormige ijzeren schijven bestaande cilinder, rotor genaamd, bevestigd (fig. 6). In deze rotor zijn langs de omtrek gleuven aangebracht, waarin zich geïsoleerde draden bevinden, die door een electrische stroom worden doorlopen. Deze draden ondervinden nu een mechanische kracht, omdat zij zich bevinden in het veld van de genoemde electromagneten. Hierdoor gaat de motor draaien. In hfdst. XII komen we nog uitvoerig op de electromotor terug.

f. De electriciteit als communicatiemiddel

Bij het overbrengen van signalen, berichten, spraak, muziek enz. wordt in vele gevallen van de electriciteit gebruik gemaakt. Als voorbeelden noemen we de electrische huisbel, de telegraaf, de telefoon en de radio, waaronder ook de televisie thuis hoort. Bij al deze toepassingen gaan we uit van een niet-electrisch gegeven, dat in een electrisch teken wordt omgezet. Dit electrisch teken wordt, hetzij over een leiding, hetzij, na omzetting in electromagnetische golven, door de ruimte, naar een ontvanger overgebracht, waar het electrische teken

weer in een niet-electrisch gegeven wordt omgezet en waarneembaar gemaakt.

Bij de huisbel (fig. 7) en de telegraaf (zie Deel 5, hfdst. V) wordt aan de zendkant op een knop D of een morsesleutel gedrukt, waardoor een electrische keten wordt gesloten. De stroom, die dan vloeit, maakt aan de ontvangkant een electromagneet M magnetisch. Deze electromagneet trekt een ijzeren plaatje P aan, waardoor de bel geluid geeft, of een schrijfpen morsetekens (punten en strepen) schrijft op een

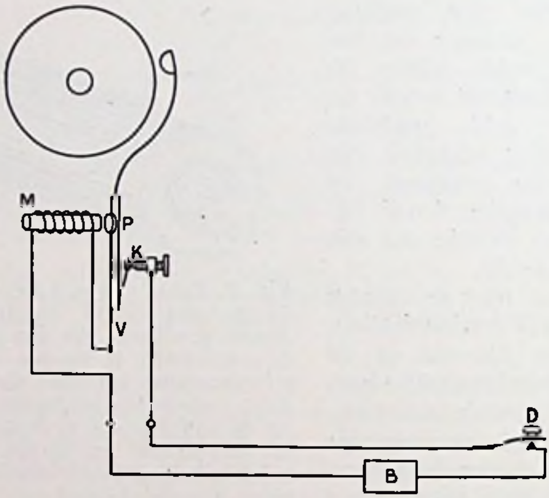


Fig. 7. Electrische huisbel. B. stroombron; D. drukknop; M. electromagneet; P. ijzeren plaatje; V. veer; K. verend contact, dat pas op het laatste ogenblik, tijdens de beweging van P naar M, wordt verbroken.

voortlopende papierband. Bij de gebruikelijke huisbel wordt het voortdurende geluid verkregen, doordat de verend bevestigde ijzeren plaat de stroom onderbreekt, als ze wordt aangetrokken. Daardoor wordt de aantrekkende electromagneet onmagnetisch, de plaat veert terug, het contact wordt weer hersteld en het spel begint opnieuw.

Bij de telefoon (zie Deel 5, hfdst. VI) worden aan de zendkant (dit is daar, waar gesproken wordt) de geluidstrillingen van de lucht met behulp van een microfoon omgezet in sterktevariaties van een electrische stroom. Aan de ontvangkant (dit is daar, waar geluisterd wordt) worden deze stroomvariaties met behulp van een telefoon weer in luchttrillingen omgezet. Bij de telefooninstallaties, zoals we die uit het dagelijks leven kennen, is iedere aangeslotene tegelijk zender en ontvanger; hij spreekt in de microfoon en luistert met de telefoon. De telefoonverbindingen worden gewoonlijk over leidingen (telefoonkabels) tot stand gebracht. Bij grote afstanden worden bovendien

versterkers tussengeschakeld, die de aankomende stroomvariaties versterkt doorgeven.

Bij radio-overdracht worden de door de microfoon geleverde stroomvariaties met behulp van een zendinstallatie omgezet in electromagnetische golven, die in de ruimte worden uitgestraald (zie Deel 4). De radio-ontvanger maakt hieruit weer stroomvariaties, die op de oorspronkelijke door de microfoon geleverde gelijken en aan een telefoon of luidspreker worden toegevoerd.

Bij de televisie (zie Deel 6a) worden lichtvariaties omgezet in variaties van een electrische stroom, waardoor deze op overeenkomstige wijze als bij andere toepassingen der radio worden omgezet in electromagnetische golven, die de ontvangantenne treffen. In de ontvanger ontstaan weer variaties van een electrische stroom, die de gewenste lichtvariaties op het scherm van de electronenstraalbuis veroorzaken.

Bij al deze toepassingen van de electriciteit voor communicatiedoeleinden wordt energie van de ene vorm in een andere vorm omgezet.

g. Medische toepassingen van de electriciteit

In de geneeskunde wordt op verschillende wijzen van de electriciteit gebruik gemaakt. We noemen slechts de röntgenstralen en de diathermie.

Met behulp van röntgenstralen kan men bv. door het menselijk lichaam heen zien en afwijkingen, zoals beenbreuken, en aantasting van de longen door tuberculose, constateren. Ook kan men soms door bestraling met röntgenstralen de groei van kwaadaardige cellen belemmeren of deze tot afsterving brengen. De diathermie dient om bepaalde delen van het menselijk lichaam door en door te verwarmen, hetgeen bv. voor de bestrijding van rheumatiek belangrijk kan zijn.

Röntgenstralen worden opgewekt door in een luchtledige buis electrische deeltjes, electronen genoemd, met grote snelheid een metalen plaatje te laten treffen. Van de plaats, waar deze electronen het plaatje treffen, gaan röntgenstralen uit. Deze stralen zijn van dezelfde aard als lichtstralen en radiogolven; alleen de golflengte is veel kleiner (10^{-13} tot 10^{-9} m); de voortplantingssnelheid is dezelfde. Ze kunnen echter verschillende stoffen doordringen, die voor het gewone licht ondoorlaatbaar zijn, zoals hout en vlees. De röntgenstralen zijn voor het oog onzichtbaar, echter is de uitwerking van deze stralen op een fotografische plaat dezelfde als die van lichtstralen. Ook kan men ze met behulp van een fluorescentiescherm zichtbaar maken. Röntgenstralen kunnen zeer gevaarlijk zijn voor het menselijk lichaam. Het is dus zaak, zich zo weinig mogelijk aan deze stralen bloot te stellen en door afscherming, bv. met loodplaten, er voor te zorgen, dat deze alleen daar komen, waar zij nodig zijn. Lood en andere zware stoffen zijn voor röntgenstralen vrijwel ondoordringbaar.

Bij de diathermie worden in het menselijk lichaam electrische stromen veroorzaakt, waarvan de richting zeer vele malen per secunde wisselt (hoogfrequente wisselstromen, met bv. 10^8 wisselingen per secunde). Op deze wijze kunnen diep onder de huid gelegen delen worden

verwarmd, zonder dat aan het menselijk lichaam schade wordt berokkend, zoals dat bij gelijkstroom of wisselstroom met lage frequentie, maar van gelijke stroomsterkte, wel het geval zou zijn. De inrichting van een diathermie-apparaat heeft enige overeenkomst met die van een radiozender voor korte golflengte (enkele meters). Men spreekt daarom bij deze geneesmethode wel op enigszins slordige wijze van „kortegolf-therapie".

h. Chemische werking van de electrische stroom

Wordt een electrische stroom geleid door een verdunde zuur- of zoutoplossing, bad genoemd, dan worden metalen of gassen uit deze oplossing afgescheiden (fig. 8). Deze afscheiding vindt plaats aan het oppervlak van de electroden a en b. Hiervoor is het gewenst, dat de stroombron B een gelijkstroom levert. Hieronder wordt een stroom verstaan, die steeds in dezelfde richting vloeit. Is de stroom een wisselstroom, dit is een stroom, die telkens van richting omkeert, dan vindt deze scheikundige werking, *electrolyse* genoemd, niet of althans niet op de gewenste wijze plaats.

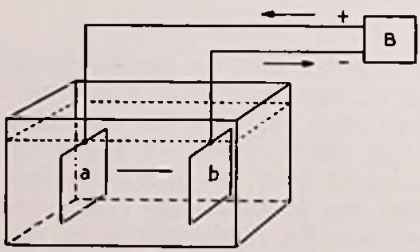


Fig. 8. Electrolyse. Uit een geleidende vloeistof worden metalen of gassen met behulp van gelijkstroom aan een of aan beide electroden a en b afgescheiden. B. gelijkstroombron.

Dit procédé kan worden gebruikt om de bedoelde gassen of metalen te produceren. Zo kan zeer zuiver koper (zg. electrolytisch koper) worden bereid. Ook kan uit water, dat door toevoeging van een weinig zuur of zout (bv. zwavelzuur) geleidend is geworden voor de electrische stroom, waterstof en zuurstof worden verkregen. Ook kan men op deze wijze een voorwerp met een metaallaag bedekken, bv. electrolytisch verkoperen, vernikkelen, verzilveren, vergulden. Daartoe wordt het bedoelde voorwerp, dat een geleider voor de electrische stroom moet zijn, als een der electroden in het bad gebruikt. Men noemt dit *galvaniseren*. Bij de onder 2.*a* te bespreken elementen en accumulatoren wordt omgekeerd met behulp van chemische omzettingen stroom opgewekt.

i. Foto-electrische werking van de electrische stroom

Een fotocel (zie Deel 2, hfdst. IV.M.11) bestaat uit een luchtledige glazen ballon, waarvan de binnenwand gedeeltelijk is bedekt met een dun laagje van een lichtgevoelige stof, bv. een caesiumverbinding. Deze laag is verbonden met een draad, die door de glaswand naar buiten is gevoerd. Verder bevindt zich in de ballon een staafvormige electrode, die eveneens met een naar buiten gevoerde draad is verbonden. Beide genoemde draden zijn verbonden met een spanningsbron,

terwijl in de keten een gevoelige stroommeter (microampèremeter) is opgenomen. Valt er licht op de gevoelige laag, dan geeft deze meter een uitslag, die des te groter is naarmate het licht sterker is. Op dit verschijnsel berust de geluidsaftasting bij de sprekende film. Ook bij de opneembuizen voor televisie (zie Deel 6a, hfdst. IV) wordt van het foto-electrisch effect gebruik gemaakt. Bij de bij de fotografie gebruikelijke luxmeters wordt een seleensperlaagcel met een microampèremeter verbonden. Als er licht op de cel valt, vloeit er al stroom, zonder dat er een spanningsbron nodig is.

j. Piëzo-electrische werking

Sommige kristallen, bv. kwarts, toermalijn, seignettezout, verkrijgen een electrische lading, wanneer er een mechanische druk op wordt uitgeoefend. Hiervan wordt o.a. gebruik gemaakt bij de kristalgramofoonopnemers (zie Deel 5, hfdst. VIII.H). De groef in de

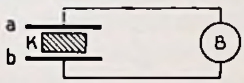


Fig. 9. Piëzo-electrisch kristal. Het kristal K, bv. een plaatje kwarts, bevindt zich tussen de metalen electroden a en b. Worden deze met de spanningsbron B verbonden, dan treedt een kleine vormverandering van K op.

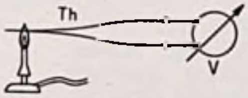


Fig. 10. Thermo-element Th. Wordt de verbindingsplaats van twee verschillende metalen verhit, dan ontstaat er een kleine spanning tussen de uiteinden, die met een gevoelige voltmeter V kan worden gemeten.

gramofoonplaat deelt buigingstrillingen mee aan het kristal, waardoor deze in electrische stromen worden omgezet, die, nadat ze door een versterker zijn versterkt, aan een luidspreker worden toegevoerd.

Wanneer men omgekeerd aan deze kristallen een electrische spanning legt door het kristal K te plaatsen tussen twee metalen plaatjes a en b, die met een spanningsbron B zijn verbonden (fig. 9), verandert de vorm van het kristal een weinig. Levert de spanningsbron een wisselspanning, dan geraakt het kristal in trilling. Hiervan wordt o.a. gebruik gemaakt in de radiotechniek om de frequentie van een zender constant te houden (zie Deel 2, hfdst. VII. 6).

k. Thermo-electrische werking

Zijn twee verschillende metalen aan elkaar gelast en zijn de beide vrije uiteinden verbonden met de klemmen van een stroommeter (fig. 10), dan geeft deze meter een uitslag, dat wil zeggen er vloeit een stroom door de keten, als de lasplaats wordt verwarmd of afgekoeld. Deze aanwijzing van de meter is een maat voor het temperatuurverschil tussen de lasplaats en de andere uiteinden. Een dergelijk instrument wordt gebruikt als thermometer (zie hfdst. VII) in die gevallen, waar een kwikthermometer ongeschikt is, bv. om zeer hoge temperaturen te meten.

Ook kan het thermo-electrisch effect worden benut om electrische stromen te meten (thermokoppels, zie Deel 7a, hfdst. I).

l. Wrijvingselectriciteit

Wordt barnsteen met een wollen doek gewreven, dan is het in staat, lichte voorwerpen, bv. papiersnippers, aan te trekken. Dit verschijnsel is het eerst ontdekt door de Griek Thales van Milete (624—547 v. Chr.). Het is het oudst bekende electrische verschijnsel. Barnsteen heet in het Grieks electron; vandaar het woord electriciteit. Een dergelijk verschijnsel kan men opmerken, als men met een ebonieten kam bij droog weer door het haar kamt. De kam kan kleine papiersnippers aantrekken, doch de gekamde haren stoten elkaar af.

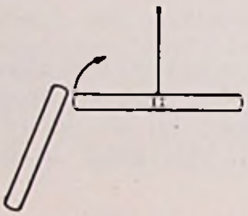


Fig. 11.
Twee ebonieten staven, door wrijving electrisch geladen, stoten elkaar af.

Wordt een gewreven ebonietstaaf licht beweegbaar opgehangen (fig. 11) en brengt men een andere gewreven ebonietstaaf in de nabijheid, dan stoten deze staven elkaar af. Brengt men echter een gewreven glasstaaf in de nabijheid, dan trekt deze de ebonietstaaf aan. Men noemt de staven dan electrisch geladen.

Deze en soortgelijke proeven hebben er toe geleid, twee soorten electrische lading aan te nemen, die men, geheel willekeurig, positief en negatief noemde. Die van de gewreven glasstaaf noemde men positief, die van de gewreven ebonietstaaf negatief. Ongelijksoortig geladen lichamen trekken elkaar aan; gelijksoortig geladen lichamen stoten elkaar af. Naderen twee ongelijksoortig geladen lichamen elkaar, dan kunnen er vonken overspringen; worden de lichamen met een groot gedeelte van hun oppervlakken met elkaar in aanraking gebracht, dan verdwijnt de electrische werking geheel of gedeeltelijk. Tegengestelde ladingen kunnen elkaar dus neutraliseren. Daarmee is de onderscheiding in positieve en negatieve electriciteit gerechtvaardigd.

De electrische stroom, waarvan we reeds verschillende verschijnselen hebben beschouwd, kan worden opgevat als een transport van electrische ladingen. Hierbij worden tegengestelde ladingen naar elkaar getrokken om elkaar vervolgens te neutraliseren.

Het ontstaan van electriciteit door wrijving kan aldus worden beschreven, dat door het wrijven de elkaar neutraliserende ladingen, in de stof aanwezig, aan de oppervlakten van de gewreven en de wrijvende stof van elkaar worden gescheiden, waarbij een hoeveelheid positieve lading op de ene stof en een gelijke hoeveelheid negatieve lading op de andere stof achterblijft.

De bliksem is een ontlading van reusachtige afmetingen tussen twee tegengesteld geladen wolken of tussen een wolk en de aarde. De wolken verkrijgen deze ladingen vermoedelijk o.a. door wrijving van waterdruppels en lucht of door het vangen van ionen door waterdruppels, die in het (steeds aanwezige) electrische veld der aarde omlaag vallen.

m. Magnetisme

Het magnetisme, waaronder bv. wordt verstaan het vermogen van zekere stoffen om ijzer aan te trekken, is het eerst opgemerkt aan de in de natuur voorkomende magneetijzersteen. Dit vermogen kan worden overgebracht op een stalen staaf door deze enige tijd tegen de magneetijzersteen te laten rusten; deze staaf wordt dan een *permanente magneet.* Tegenwoordig worden permanente magneten echter met behulp van

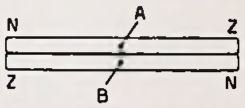


Fig. 12. A. Permanente magneet; B. stalen staaf, die door de permanente magneet wordt gemagnetiseerd; N. magnetische noordpool; Z. magnetische zuidpool.

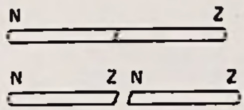


Fig. 13. Door een permanente magneet in twee stukken te verdelen worden twee magneten verkregen, ieder met een noord- en een zuidpool.

electromagneten gemagnetiseerd. Zij worden gebruikt als magneetnaald in het kompas, in de vorm van een hoefijzermagneet als kinderspeelgoed, voor het bijstellen van maximum- en minimumthermometers (zie hfdst. VII), verder in de telefoon en de luidspreker, in de fietsdynamo enz.

Met behulp van magneetnaalden kan men gemakkelijk enkele eigenschappen van magneten constateren. Op een magneetnaald werkt een kracht, die het ene einde ongeveer naar het noorden, het andere einde ongeveer naar het zuiden trekt. Men noemt deze beide einden de noordpool en de zuidpool van de magneet. Met behulp van twee magneetnaalden kan men constateren, dat gelijknamige polen elkaar afstoten en ongelijknamige polen elkaar aantrekken.

Van een stalen staaf B kan men een permanente magneet maken door deze enige tijd te laten rusten tegen een andere permanente magneet A (fig. 12). Waar de permanente magneet een noordpool heeft, ontstaat een zuidpool in de te magnetiseren staaf, en omgekeerd. Breekt men een permanente magneet door, dan treden aan de breuk een noord- en een zuidpool op (fig. 13), zodat ieder stuk een noord- en een zuidpool verkrijgt.

Zacht ijzer wordt tijdelijk magnetisch, als men het in de buurt van een permanente magneet brengt (fig. 14). Het verliest echter zijn magnetisme weer bijna geheel, als de permanente magneet wordt verwijderd.

Nadat men de magnetische verschijnselen bij permanente magneten had leren kennen, werd ontdekt, dat ook een electrische stroom magnetische werkingen vertoont. Legt men bv. een draad, waardoor een gelijkstroom vloeit, boven een kompasnaald, en wel in de richting van de naald, dan wijkt de naald van de oorspronkelijke stand af.

Wikkelt men een aantal windingen van geïsoleerde draad om een staaf van zacht ijzer en leidt men een gelijkstroom door de draad, dan wordt de ijzeren staaf een magneet, met een noord- en een zuidpool (fig. 15). Na het uitschakelen van de stroom verdwijnt het magnetisme weer vrijwel geheel. Een dergelijke constructie wordt een electromagneet genoemd.

Bij de huisbel, de telegraaf en de electromotor hebben we reeds het gebruik van een electromagneet ontmoet. Neemt men in fig. 15

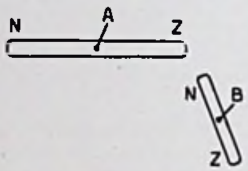


Fig. 14. A. permanente magneet; B. staaf van zacht ijzer, die in de buurt van de permanente magneet magnetisch wordt.

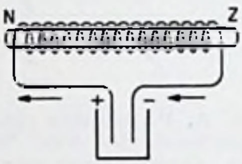


Fig. 15. Een ijzeren staaf, bewikkeld met een geleidende geïsoleerde draad. De staaf wordt magnetisch als er stroom door de draad vloeit (electromagneet). Bij de door de pijlen aangegeven stroomrichting ontstaat bij N een magnetische noordpool en bij Z een magnetische zuidpool.

in plaats van een staaf van zacht ijzer een staaf van hard staal, dan wordt deze staaf ook magnetisch, doch behoudt het magnetisme grotendeels na het uitschakelen van de stroom. De staaf is een permanente magneet geworden.

In de laatste tijd heeft men nog andere materialen leren kennen, die voor magnetische doeleinden kunnen worden gebruikt. Sommige hiervan zijn legeringen, die in hoofdzaak ijzer en nikkel bevatten, bv. permalloy en ticonal; andere zijn samengesteld uit metaaloxyden, zoals ferroxcube en ferroxdure. Ticonal en ferroxdure worden gebruikt als materiaal voor permanente magneten; permalloy en ferroxcube kunnen dienen voor electromagneten, doch zij verliezen, evenals zacht ijzer, hun magnetisme weer als de magnetiserende stroom ophoudt te vloeien. Voor vele toepassingen is deze eigenschap juist gewenst. In verband met andere betekenissen van de woorden hard en zacht verdient het aanbeveling, bij de magnetische materialen niet te spreken van „hard" en „zacht" zonder meer, maar van „magnetisch harde" en „magnetisch zachte" materialen.

Zoals vermeld, kan een electrische stroom magnetische werkingen vertonen. Omgekeerd kan men met magneten electriciteit opwekken. Beweegt men bv. een draad loodrecht op zijn lengterichting dicht langs een pool van een magneet, dan ontstaat er tijdens deze beweging een electrische spanning tussen de uiteinden van deze draad. Deze spanning verdwijnt, als de draad niet meer wordt bewogen of als deze uit de buurt van de magneetpool is gekomen. Ook ontstaat een spanning

tussen de uiteinden van een spoel, als men een permanente magneet in de spoel steekt of een aanwezige magneet er weer uit trekt. Zijn de uiteinden van de spoel verbonden met een verbruiksapparaat, bv. een gloeilampje (fig. 16), dan kan dit lampje even oplichten, zowel bij het inbrengen als bij het uittrekken van de magneet. De richting van de electrische stroom in de keten is bij het uittrekken tegengesteld aan de richting van de stroom bij het inbrengen van de magneet. Hetzelfde verschijnsel treedt op bij een spoel, die op een ijzerkern is

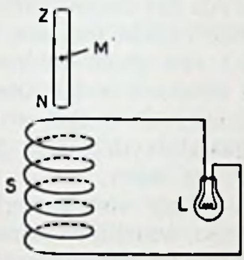


Fig. 16. S. Spoel; M. magneet; L. electrisch gloeilampje. Bij het inbrengen van de magneet M in de spoel S, en eveneens bij het uittrekken, licht het lampje even op.

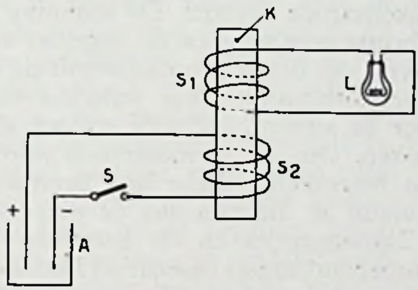


Fig. 17. Opwekken van electriciteit door verandering van de magnetisering van een ijzerkern. K. ijzerkern; S_1, S_2, spoelen; A. accumulator; S. schakelaar; L. gloeilampje. Bij het sluiten en bij het openen van de schakelaar licht het lampje even op.

gewikkeld, als de ijzerkern door het naderen of verwijderen van een permanente magneet of een electromagneet wordt gemagnetiseerd of weer onmagnetisch wordt.

Hetzelfde effect wordt ook bereikt, als de ijzerkern gemagnetiseerd wordt met behulp van een tweede spoel, die eveneens op deze ijzerkern is gewikkeld (fig. 17). Gedurende het toenemen van de stroom in deze tweede spoel ontstaat er in de eerste keten een spannings- en stroomstoot in de ene richting; gedurende het afnemen van de stroom in de tweede spoel hebben de spannings- en stroomstoot in de eerste keten de andere richting. Is de stroom in de tweede spoel constant, dan ontstaat er geen spanning en geen stroom in de eerste keten.

Al deze verschijnselen, waarbij electriciteit wordt opgewekt met behulp van veranderend magnetisme of door beweging van geleiders in magnetische velden, noemt men magnetische *inductie*.

2. Stroom- en spanningsbronnen

a. Elementen en accumulatoren

Dompelen we twee verschillende metalen in een zoutoplossing, een verdund zuur of een verdund loog, dan ontstaat er een electrische

spanning tussen deze beide metalen. De beide metalen noemen we de electroden (een er van kan ook worden vervangen door kool); de vloeistof wordt een electrolyt genoemd. Het geheel noemen we een galvanisch element. Verbinden we de beide electroden met een verbruiksapparaat, bv. een klein gloeilampje, dan levert het element gedurende lange tijd stroom: het lampje brandt.

Het meest gebruikte element is het Leclanché-element. De electroden bestaan uit kool en zink; de electrolyt is een oplossing van salmiak (ammoniumchloride) in water. De koolelectrode wordt positief, de zinkelectrode negatief. De spanning is ca 1,5 volt; dit element wordt gebruikt voor stromen tot ongeveer 0,5 ampère. Als het element stroom levert, lost het zink op en wordt de koolelectrode bedekt met een laag waterstofblaasjes. Deze waterstof vormt echter een grote weerstand voor de stroom, zodat de stroom afneemt en tenslotte wordt onderbroken. Om dit te voorkomen wordt de koolelectrode omgeven met een betrekkelijk dikke laag bruinsteen (mangaandioxyde). Dit geeft zuurstof af, die zich met de waterstof verbindt tot water.

Zakbatterijtjes en de batterijen voor de voeding van draagbare omroepontvangers bestaan uit Leclanché-elementen, waarbij de salmiakoplossing door het toevoegen van een bindmiddel is verdikt om het wegvloeien van de electrolyt te voorkomen. Zo wordt een „droge batterij" verkregen.

Na een zekere tijd zijn de batterijen uitgeput en zijn dan onbruikbaar geworden. Een *accumulator* (wel kortweg accu genoemd) is een stroombron, die door middel van gelijkstroom wordt geladen en daarna gedurende een zekere tijd stroom kan leveren. Na ontlading kan de „accu" weer opnieuw worden geladen. De meest gebruikte accumulator is de loodaccumulator. Deze bestaat uit een glazen of ebonieten bak met verdund zwavelzuur, waarin twee stel loodplaten zijn geplaatst. Deze platen worden in het zwavelzuur bedekt met een laag loodsulfaat. Men laat gedurende lange tijd, bv. 10 uur, een gelijkstroom door de accumulator vloeien. Op de loodplaat, die met de positieve pool van de stroombron is verbonden, ontstaat looddioxyde (bruin van kleur), terwijl op de andere plaat het loodsulfaat wordt gereduceerd tot lood (grijs van kleur). Hierbij wordt de concentratie van het zwavelzuur groter en neemt dus het soortelijk gewicht toe. Na het uitschakelen van de stroombron hebben we een element verkregen, met zwavelzuur als electrolyt en looddioxyde en lood als electroden. De accumulator kan nu stroom leveren. De plaat met het looddioxyde, dit is de plaat, die tijdens het laden met de positieve pool van de stroombron was verbonden, blijkt nu de positieve pool te zijn geworden en de andere plaat de negatieve pool. De spanning van de accumulator is ca 2 volt. De stroom, die de accumulator kan leveren zonder te worden beschadigd, is, afhankelijk van de afmetingen der platen, bv. 1 tot 100 ampère. Deze stroom kan enkele uren worden geleverd zonder dat de spanning noemenswaard daalt. Bij dit ontladen keren de platen geleidelijk weer tot de oude toestand terug, waarbij zij worden

bedekt met loodsulfaat, terwijl de zuurconcentratie kleiner wordt. Een meting van de zuurconcentratie geeft daarom een aanwijzing, hoever de accumulator ontladen is. Ten slotte neemt de spanning af; is deze gedaald tot 1,8 volt, dan mag de ontlading niet verder worden voortgezet en moet opnieuw lading plaats vinden. Anders krijgt de laag loodsulfaat op de platen op de duur een ongunstige structuur, waardoor de geschiktheid van de accumulator voor het opnemen van electrische energie blijvend minder wordt.

Bij het laden wordt een klein gedeelte van het water ontleed en ontwijkt als gasvormige waterstof en zuurstof. Daarom moet bij een in gebruik zijnde accumulator het niveau van de vloeistof op peil worden gehouden door af en toe gedistilleerd water toe te voegen. Om dezelfde reden is het gevaarlijk, accu's te laden in een gesloten vertrek en tijdens het laden de accu met vuur te naderen (knalgas!).

Om het werkzame oppervlak van de loodplaten aanzienlijk te vergroten worden de platen niet massief gemaakt, maar in de vorm van een rooster, waarbij de mazen zijn opgevuld met poreus looddioxyde (bij de positieve plaat) en poreus lood (bij de negatieve plaat). Bij zware mechanische stoten en bij te grote laad- of ontlaadstroom laat deze vulmassa los en wordt de accumulator beschadigd. Voorzichtige behandeling is daarom noodzakelijk.

Zowel bij het element als bij de accumulator wordt tijdens het gebruik chemische energie omgezet in electrische energie. Bij de accumulator wordt tijdens het laden electrische energie omgezet in chemische energie en kan dus electrische energie worden verzameld en bewaard (vandaar de naam).

De spanning van een element of een accumulator is in vele gevallen te laag voor practisch gebruik. Dan wordt een aantal cellen in serie geschakeld, zodanig, dat de negatieve pool van de tweede cel wordt verbonden met de positieve pool van de eerste cel enz. (zie fig. 18).

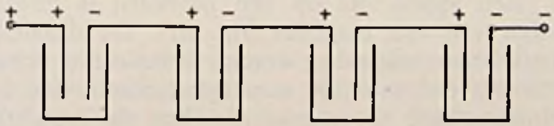


Fig. 18. Serieschakeling van elementen of accumulatoren. Het verbruiksapparaat wordt aan de door cirkeltjes aangegeven klemmen aangesloten.

Door *n* cellen in serie te schakelen wordt een spanning verkregen, die *n* maal de spanning van een enkele cel is. Wenst men een stroom te verbruiken, die groter is dan de stroom, die voor één cel toelaatbaar is, dan schakelt men twee of meer cellen parallel, dat wil zeggen men verbindt van alle cellen de positieve polen met elkaar en eveneens de negatieve polen (zie fig. 19). Door een voldoende aantal cellen in serie

en parallel te schakelen kan men batterijen vormen, geschikt voor de gewenste spanning en de gewenste stroom (fig. 20). Men vermijde het directe verbinden van de positieve en de negatieve klem van een en dezelfde cel. Dit betekent *kortsluiting*, waarbij een zeer grote stroom kan optreden. De verbindingsdraad kan smelten en brand veroorzaken, terwijl de accumulator kan worden beschadigd.

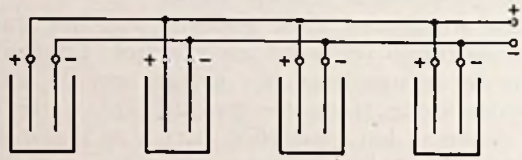


Fig. 19. Parallelschakeling van elementen of accumulatoren.

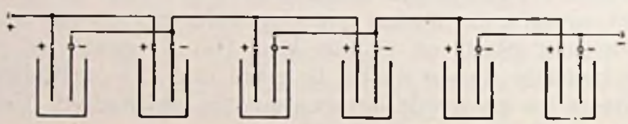


Fig. 20. Serieschakeling van drie groepen van telkens twee parallel geschakelde elementen.

b. Dynamomachines

Met behulp van dynamomachines kan mechanische energie worden omgezet in electrische energie. Hierbij wordt gebruik gemaakt van het inductieverschijnsel; door verandering van het magnetische veld, dat door een spoel wordt omvat, ontstaat tussen de uiteinden van de spoel een spanning, die, wanneer de keten wordt gesloten, een stroom tot gevolg heeft. Een spoel, die op een ijzerkern is gewikkeld, draait tussen de polen van een magneet (fig. 21). De draaiende ijzerkern wordt magnetisch; de uiteinden worden afwisselend noord- en zuidmagnetisch; is het ene uiteinde noordmagnetisch, dan is het andere uiteinde zuidmagnetisch en omgekeerd. Daar de magnetisatie van de kern voortdurend verandert, wordt in de spoel een spanning opgewekt, waarvan de grootte en de richting regelmatig wisselen, bij benadering sinusoïdaal veranderlijk met de tijd (fig. 22). De constructie volgens fig. 21 wordt o.a. toegepast bij de magneetontsteking van auto's en motorfietsen. De uiteinden van de draaiende spoel worden verbonden met sleepringen, die geïsoleerd op de as zijn bevestigd. Op deze sleepringen rusten stilstaande koolborstels, die met het verbruiksapparaat zijn verbonden.

De stroom, die door het verbruiksapparaat vloeit, verandert op dezelfde wijze met de tijd als de spanning, dus zoals fig. 22 aangeeft. Een dergelijke stroom noemt men een wisselstroom, en de geleverde

spanning een wisselspanning. Bij elementen en accumulatoren is de spanning aan de klemmen steeds dezelfde en is de ene klem steeds de positieve, de andere steeds de negatieve pool. De stroom in de uitwendige keten heeft daarbij steeds dezelfde richting, van de positieve naar de negatieve pool, en is steeds even groot.

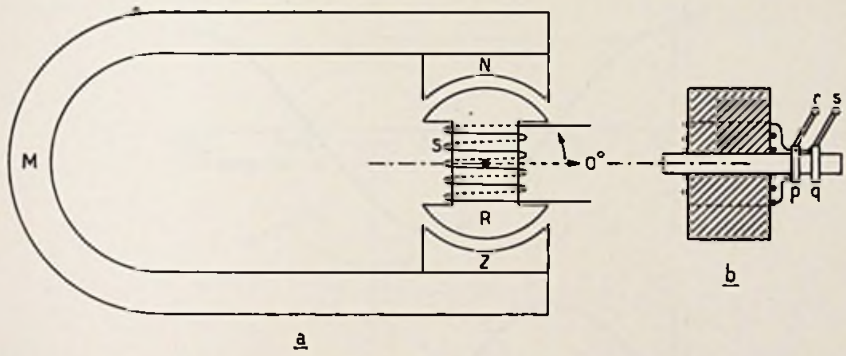


Fig. 21. a. Dynamo; M. magneet met noordpool N en zuidpool Z; R. ijzeren rotor of anker (dubbel-T-anker); de rotor is in een stand getekend, die we 0° noemen. b. lengtedoorsnede van de rotor: p, q. sleepringen, die van elkaar en van de as zijn geïsoleerd; r, s. borstels om de bij draaiing van de rotor opgewekte spanning te kunnen afnemen.

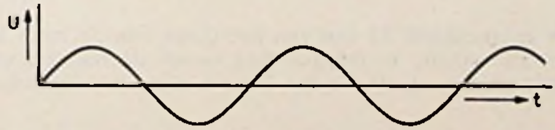


Fig. 22. De spanning *U* tussen de uiteinden van de draaiende spoel van fig. 21 als functie van de tijd *t*.

We beschouwen nu het draaibare gedeelte van de dynamomachine volgens fig. 21. Dit wordt de rotor of het anker genoemd. Naar de vorm van de doorsnede van het ijzer wordt het een dubbel-T-anker genoemd. We nemen aan, dat dit anker met constante snelheid draait en dat we de spanning tussen de aansluitklemmen r en s meten met een voltmeter, die traagheidsloos werkt. Als we de spanning uitzetten tegen de daarbij behorende stand van de rotor tijdens het draaien, verkrijgen we een kromme volgens fig. 23b. Dit kunnen we als volgt verklaren. De spanning wordt veroorzaakt door de *verandering* van de magnetische toestand van de rotor. In de getekende stand, die we als de beginstand aannemen (draaiingshoek 0°) is de rotor wel het sterkst gemagnetiseerd, evenals in de stand, 180° verder, maar de verandering van de magnetisatie is in deze standen tijdens het draaien het kleinst. In de standen 90° en 270° is de magnetisatie volgens de as van de

spoel het kleinst (gaat door nul), doch is de verandering hiervan het grootst. De spanning (dat wil zeggen de momentele waarde van de spanning) gaat bij 0° en 180° door nul en is bij 90° en 270° maximaal, doch met tegengestelde richtingen. Dit blijkt bij een beschouwing van fig. 23. In fig. 23a is de magnetisatie van de in fig. 21 bovenste pool

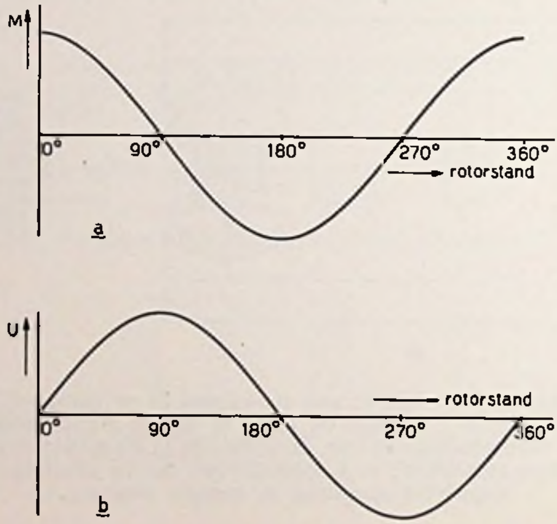


Fig. 23. a. De magnetisatie *M* van een der polen van de rotor volgens fig. 21 als functie van zijn stand; b. de spanning tussen de borstels van de dynamo volgens fig. 21 als functie van de stand van de rotor.

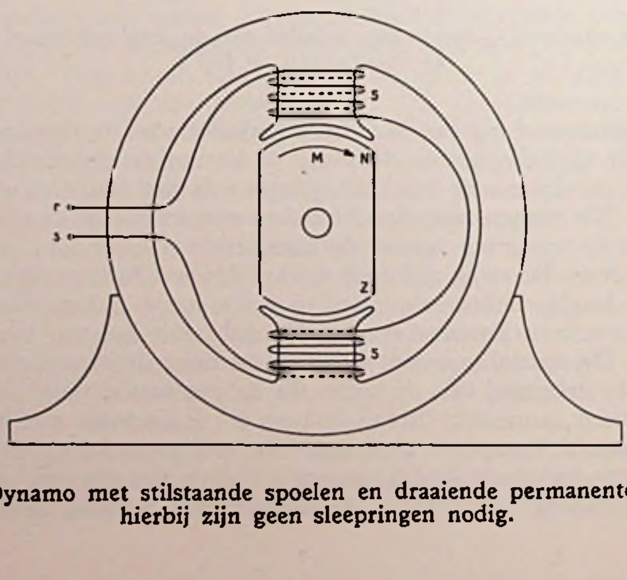


Fig. 24. Dynamo met stilstaande spoelen en draaiende permanente magneet; hierbij zijn geen sleepringen nodig.

van het dubbel-T-anker aangegeven afhankelijk van de stand bij het draaien. In de stand 0° is deze pool maximaal zuidmagnetisch, bij 90° onmagnetisch, bij 180° maximaal noordmagnetisch, bij 270° onmagnetisch en bij 360° weer maximaal zuidmagnetisch. De verandering van de magnetisatie, dus ook de grootte van de opgewekte spanning, is

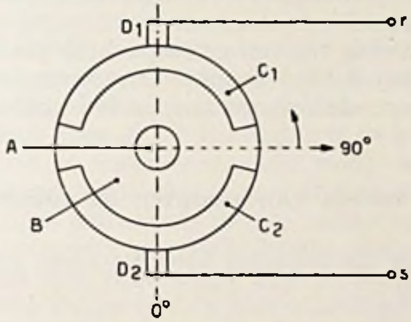


Fig. 25. Commutator: A. as; B. isolatiemateriaal; C_1, C_2. van elkaar geïsoleerde halve sleepringen; D_1, D_2. koolborstels; r, s. klemmen. De nullijn komt overeen met die van fig. 21. De commutator is getekend in de stand 90°.

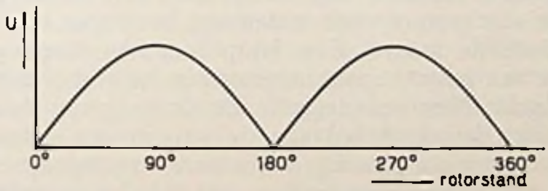


Fig. 26. De spanning U van de dynamo volgens fig. 21 als functie van de rotorstand, bij gebruik van een commutator.

het grootst, als de helling van de kromme van fig. 23a het grootst is, terwijl de richting van de spanning wisselt bij het wisselen van de richting van de helling van de kromme van fig. 23a. Hieruit volgt, dat de spanning tussen de borstels verloopt zoals fig. 23b aangeeft.

De sleepringen en de aan slijtage onderhevige koolborstels kunnen worden vermeden door de spoel te wikkelen op een stilstaande kern, de stator, en de magneet op de draaiende as te bevestigen (fig. 24).

In vele gevallen wenst men niet een wisselspanning, doch een gelijkspanning. Met een kleine wijziging in de constructie van fig. 21 kan men een spanning verkrijgen, die steeds dezelfde richting behoudt, doch waarvan de grootte varieert. Daartoe neemt men in plaats van de beide sleepringen een enkele ring, die uit twee onderling en van de as geïsoleerde gedeelten bestaat (fig. 25). De uiteinden van de

draaiende spoel zijn ieder met een der helften van de sleepring verbonden. De beide borstels rusten op deze ring, diametraal tegenover elkaar, en zijn zo geplaatst, dat zij van de ene helft van de sleepring op de andere helft overgaan op het ogenblik, dat de spanning in de spoel van teken wisselt. De spanning tussen de borstels verandert dan zoals in fig. 26 aangegeven. Een sleepring zoals hier gebruikt, waarmee de richting van de spanning en dus ook van de stroom op het juiste ogenblik wordt gewisseld, heet *commutator*.

Een betere benadering van een gelijkspanning kan worden verkregen door in plaats van het dubbel-T-anker een trommelanker te gebruiken met de daarbij behorende commutator, zoals in hfdst. XII zal worden besproken.

3. Het meten van stromen en spanningen

a. Verschijnselen, die als grondslag voor het meten van stromen en spanningen dienen

Voor een nauwkeuriger onderzoek van de electrische en magnetische verschijnselen, zoals die onder 1 zijn beschreven, is het nodig, stromen en spanningen te meten met daarvoor geschikte instrumenten, nl. ampère- en voltmeters. Bij de beschrijving van de gloeilampen onder 1.*a* hebben we reeds aangeduid, hoe men zich een begrip van stroom en spanning kan vormen. Een lamp met een dikke gloeidraad is bestemd voor een grotere stroom dan een lamp met een dunne gloeidraad van dezelfde lengte. Een lamp met een lange gloeidraad is bestemd voor een hogere spanning dan een lamp met een korte, even dikke, gloeidraad. Men kan zeggen, dat de spanning de stroom door de draad drijft, dat de draad aan de stroom een zekere weerstand biedt en dat de spanning nodig is om deze weerstand te overwinnen. We kunnen een vergelijking maken met een buis, waar water door stroomt. De hoeveelheid water, die per secunde door de buis stroomt, komt overeen met de stroomsterkte; het drukverschil tussen het begin en het einde van de buis komt overeen met de spanning. De buis biedt een zekere weerstand aan het doorstromende water, op overeenkomstige wijze als een koperdraad een weerstand biedt aan de er door stromende electriciteit.

Om de sterkte van een electrische stroom te bepalen, zouden we in principe een der onder 1 genoemde werkingen naar willekeur kunnen uitzoeken. Men zou bv. een bepaalde gloeilamp als stroommeter kunnen nemen. Als deze meer licht geeft, kan men dit als een aanwijzing beschouwen, dat er een grotere stroom door de gloeidraad vloeit dan wanneer de lichtsterkte kleiner is. We zouden ook kunnen afspreken, dat we de stroom tweemaal zo groot noemen, als de lichtsterkte van de lamp tweemaal zo groot is. Deze afspraak en meetmethode is echter om practische en om principiële redenen niet aanbevelenswaardig. Een practische reden is, dat lichtsterktemetingen niet

eenvoudig en niet zeer nauwkeurig zijn. Een principiële reden is, dat een zwakke stroom, die de gloeidraad wel verwarmt, doch niet tot het uitstralen van licht brengt, op deze wijze niet kan worden aangetoond en dus zeker niet kan worden gemeten.

Het zou al beter zijn, als we de warmte-ontwikkeling in een bepaalde draad als maat voor de stroomsterkte zouden nemen. We zouden bv. die stroomsterkte het dubbele van een andere kunnen noemen, die in een draad van een bepaald materiaal en bepaalde lengte en doorsnede per secunde de dubbele warmtehoeveelheid zou ontwikkelen. Toch zou een dergelijke maat voor de stroomsterkte tot een onoverzichtelijke en moeilijk te ordenen electriciteitsleer leiden.

Een geschikte maat voor de stroomsterkte is de kracht, die door een zich in de nabijheid bevindende magneet wordt uitgeoefend op een draad, waar de stroom door vloeit, met andere woorden de kracht, die een stroomgeleider ondervindt in een magnetisch veld. Stellen we de stroomsterkte evenredig met deze kracht, dan verkrijgen we een electriciteitsleer met zeer eenvoudige wetten. We kunnen de stroomsterkte ook evenredig stellen met de hoeveelheid metaal, die de stroom per secunde afscheidt uit een oplossing van een metaalzout in water; we komen dan tot dezelfde eenvoudige electriciteitswetten.

Bij het meten van electrische spanningen doen we eveneens een doelmatige keuze uit de verschijnselen, die het gevolg zijn van een spanning. We zouden bv. als maat voor de spanning kunnen nemen de afstand tussen twee metalen bollen, waartussen juist een vonk overspringt. Hoe hoger de spanning, des te groter is deze afstand. Doch tegen deze meetmethode bestaan ook weer practische en principiële bezwaren. Kleine spanningen zou men op deze wijze niet kunnen meten, omdat daarbij geen duidelijke vonkoverslag plaats vindt. Doch ook bij grote spanningen is de afstand der bollen geen eenvoudige maat voor de spanning; bij dezelfde spanning zal men verschillende afstanden vinden, afhankelijk van de afmetingen der bollen, de gladheid van het oppervlak, de vochtigheid en het stofgehalte der omringende lucht. Maar al zouden we deze factoren nauwkeurig vastleggen en daardoor misschien reproduceerbare meetresultaten verkrijgen, dan zouden we toch nog onoverzichtelijke betrekkingen krijgen tussen de aldus bepaalde spanning en de andere verschijnselen, die van de spanning afhangen.

Een doelmatige grondslag voor het meten van spanningen vinden we in de stroom, die vloeit in een geleider, die de twee punten, waartussen de spanning staat, verbindt. We noemen een spanning tweemaal zo groot als een andere, wanneer de stroom door dezelfde geleidende verbinding, bv. een lange, dunne draad van koper of ander geleidend materiaal, tweemaal zo groot is. Daar de weerstand van geleiders gewoonlijk afhangt van de temperatuur, moet er bij een dergelijke meting voor worden gezorgd, dat de temperatuur van de geleider constant wordt gehouden.

Een ander verschijnsel, dat eveneens geschikt is voor het meten van

spanningen, is de kracht, waarmee twee geleiders, waartussen een spanning staat, elkaar aantrekken. We noemen een spanning tweemaal zo groot als een andere, indien de aantrekkende kracht tussen twee er mee verbonden geleiders (bv. twee evenwijdige metalen platen) het viervoud is van die bij de andere spanning, mits de afstand tussen de platen dezelfde is. We stellen dus, dat de kracht evenredig is met de tweede macht van de spanning. Bij deze bepaling van de spanning komen we tot dezelfde eenvoudige electriciteitswetten als bij de eerstgenoemde methode van spanningsmeting. Bij de meetopstelling lette men erop, dat er geen stromen door de geleiders lopen; daardoor zouden nog andere krachten, nl. magnetische, op de geleiders gaan werken.

b. Instrumenten voor het meten van stromen en spanningen

Voor het meten van stromen en spanningen zijn verschillende instrumenten in gebruik, die in Deel 7a zijn beschreven.

De draaispoelmeter (zie Deel 7a, hfdst. I.2) berust op het onder *a* genoemde verschijnsel, dat een geleider, waardoor stroom vloeit, een kracht ondervindt in een magnetisch veld. In deze meter wordt de geleider gevormd door een dunne koperdraad, die op een raampje is gewikkeld. De zo gevormde spoel kan om zijn as draaien en is verbonden met een spiraalveer. De spoel bevindt zich in een magnetisch veld. Vloeit er stroom door de spoel, dan ondervindt deze een kracht, waardoor de spoel gaat draaien. Deze kracht is groter, naarmate de door de spoel vloeiende stroom groter is. De veer wordt daarbij gespannen en oefent op de draaiende spoel een kracht in tegengestelde richting uit, evenredig met de hoek, waarover de spoel is gedraaid. De spoel bereikt een evenwichtsstand, waarbij de krachten, die het magnetisch veld en de gespannen veer uitoefenen, met elkaar evenwicht maken. De hoek, waarover de spoel is gedraaid en die door de aan de spoel bevestigde wijzer wordt aangewezen, is dus een maat voor de kracht, die de spoel van het magnetisch veld ondervindt, en daarmee voor de stroom door de spoel. Het is betrekkelijk gemakkelijk, een draaispoelmeter zo te construeren, dat de uitslag evenredig is met de door de gelijkstroom uitgeoefende kracht.

Stroommeters worden geijkt door deze te vergelijken met een precisiemeter. Hoe men aan de ijking van deze precisiemeter komt, wordt besproken onder 11, waarbij ook de bepaling van de eenheid van stroom, de ampère (afgekort A), ter sprake zal komen.

Een hittedraadmeter (zie Deel 7a, hfdst. I.7) berust op het verschijnsel, dat een draad, waardoor stroom vloeit, warm wordt. Door deze verwarming wordt de draad langer; de verlenging van de draad wordt op een wijzer overgebracht. De uitslag van deze meter is echter niet evenredig met de stroomsterkte I. Proeven hebben aangetoond, dat de warmte-ontwikkeling door een electrische stroom evenredig is met de tweede macht van de stroom (wet van Joule). De verlenging van de hittedraad en daarmee de uitslag zijn dan ook bij benadering

evenredig met de tweede macht van de stroom, dat wil zeggen een dubbele stroom geeft ongeveer de viervoudige uitslag. Dit heeft tot gevolg, dat, terwijl bij een draaispoelmeter de schaalstrepen alle even ver van elkaar staan, deze bij een hittedraadmeter in het begin van de schaal een kleinere onderlinge afstand hebben dan aan het eind (fig. 27).

Voor verdere bijzonderheden betreffende deze en andere meters, in het bijzonder hun geschiktheid voor het meten van wisselstromen en -spanningen, verwijzen we naar Deel 7a, hfdst. I. Spanningen kan

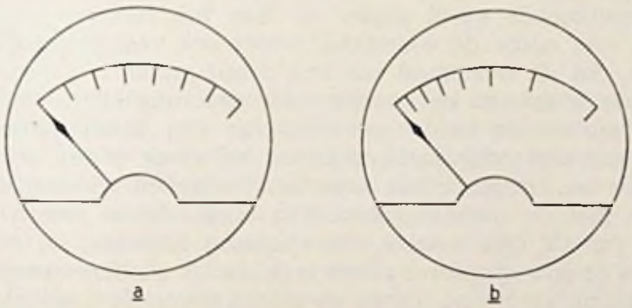


Fig. 27. a. Schaal van een draaispoelmeter; b. schaal van een hittedraadmeter.

men o.a. meten, door een stroommeter een hoge weerstand te geven en de meter parallel aan de spanningsbron te schakelen in plaats van in serie met de stroomverbruiker. De door deze veranderde stroommeter vloeiende stroom is evenredig met de aan zijn klemmen liggende spanning. Ten gevolge van zijn hoge weerstand neemt de spanningsmeter zelf slechts weinig stroom en beïnvloedt hij dus de toestand van de spanningsbron niet of slechts in geringe mate.

Over de bepaling van eenheid van spanning, de volt (afgekort V), zie 11.

4. De wetten betreffende de electrische stroom, het electrische veld en het magnetische veld

a. Geleiding, capaciteit, zelfinductie

Bij het beschrijven van de electrische verschijnselen maken we o.a. gebruik van de begrippen geleiding, zelfinductie en capaciteit. Bij een constante gelijkstroom komt hiervan alleen de geleiding ter sprake; bij het in- en uitschakelen van een gelijkstroom en bij wisselstroom spelen bovendien de zelfinductie en de capaciteit een rol. Het verschijnsel, dat we *geleiding* noemen, kunnen we het eenvoudigst bestuderen aan een draadweerstand. Dit is een lange, dunne draad van

koper of ander geleidend materiaal, die om practische redenen vaak op een cilinder van isolatiemateriaal is gewikkeld. Het begrip *capaciteit* treedt op bij een *condensator*, die bestaat uit twee geleiders, bv. vlakke metalen platen, gescheiden door een isolerende stof (bv. lucht of papier); *zelfinductie* is in het bijzonder een eigenschap van *spoelen* met of zonder kern van ijzer of een ander magnetisch materiaal.

Verbinden we de einden van een koperdraad met twee geleiders, waartussen een zekere constante spanning bestaat, dus met de klemmen van een gelijkspanningsbron, dan vloeit er een stroom door de draad. De grootte hiervan hangt af van de geleiding van de draad. We zeggen, dat de geleiding van de draad des te groter is, naarmate de stroom in het beschouwde geval groter is. Van het reciproke begrip van geleiding, met name de *weerstand*, wordt ook veel gebruik gemaakt. Men zegt, dat de weerstand van een draad groter is naarmate de er door vloeiende stroom bij een bepaalde spanning kleiner is.

Verbinden we de beide geleiders van een condensator met de klemmen van een gelijkspanningsbron, dan vloeit er een kortstondige stroom, die we stroomimpuls noemen. Verbreken we daarna de verbindingen met de spanningsbron, dan blijkt, dat er tussen de beide geleiders van de condensator een spanning aanwezig is, even groot als die van de spanningsbron; men zegt, dat de condensator geladen is. Deze spanning verdwijnt, als we de geleiders van de condensator door middel van een geleidende draad met elkaar verbinden, waarbij gedurende een korte tijd stroom door deze draad vloeit.

Verbinden we de uiteinden van een spoel met de klemmen van een gelijkspanningsbron, dan neemt de stroom geleidelijk toe tot een waarde, die bepaald wordt door de geleiding van de draad, waarvan de spoel is gewikkeld. Deze eigenschap van de spoel, namelijk dat de stroom niet plotseling, doch slechts geleidelijk verandert, noemen we de *zelfinductie*. Verbreken we de stroom, dan treedt aan de onderbrekingsplaats een vonk op. Dit wijst er op, dat door het onderbreken van de stroom door de spoel tussen de uiteinden een kortstondige hoge spanning ontstaat. Ook dit is een gevolg van de zelfinductie.

b. Electrische en magnetische velden

In de ruimte tussen twee geleiders, waartussen een spanning aanwezig is, kunnen electrische werkingen (influentie, zie onder 5) optreden en ook mechanische krachten (papiersnippers worden door de geleiders aangetrokken). De ruimte, waar deze electrische werkingen kunnen worden aangetoond, noemt men het *electrische veld*. Bij twee plaatvormige geleiders behoort niet alleen de ruimte tussen deze platen tot het electrische veld; het strekt zich ook daarbuiten uit, hoewel de werkingen snel zwakker worden bij het toenemen van de afstand.

In de ruimte binnen en rondom een spoel, waardoor stroom vloeit, en ook om iedere draad, waardoor een stroom vloeit, kunnen magnetische werkingen en mechanische krachten optreden (ijzer wordt

magnetisch; een magneetnaald wijkt af van de normale richting). Men zegt, dat zich om een stroombaan een *magnetisch veld* vormt.

De twee geleiders van de eerste alinea vormen feitelijk een condensator, waaraan wij al het verschijnsel capaciteit hebben opgemerkt. Aan spoelen hebben wij het verschijnsel zelfinductie kunnen constateren. Het vermoeden ligt dan voor de hand, dat het optreden van capaciteit samenhangt met de aanwezigheid van een electrisch veld en het optreden van zelfinductie met het ontstaan van een magnetisch veld. Dit is inderdaad het geval. Daarom kunnen we door het beschouwen van capaciteiten en zelfinducties en het meten van spanningen en stromen het een en ander te weten komen over electrische en magnetische velden.

c. *De wet van Ohm*

We beschouwen een schakeling volgens fig. 28, bestaande uit een accumulatorbatterij B, een voltmeter V, een ampèremeter A en een lange, dunne draad met een geleiding G. Beide meters geven een zekere uitslag. De spanning van de batterij, uitgedrukt in volt, noemen we U; de stroom, die de meter A aanwijst, uitgedrukt in ampère, noemen we I. Veranderen we de spanning U van de batterij, bv. door meer of minder cellen in serie te schakelen, dan blijkt I evenredig met U te veranderen; we kunnen dus stellen

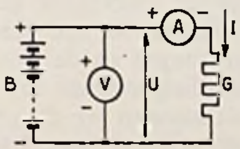


Fig. 28. Schakeling, waarmee de wet van Ohm kan worden aangetoond: B. batterij; G. geleider; V. voltmeter; A. ampèremeter; U. de gemeten spanning; I. de gemeten stroom.

$$I = G\,U, \quad\quad (1)$$

waarbij G constant is, onafhankelijk van de spanning, mits de temperatuur van de draad constant blijft. We noemen G de geleiding van de draad. De geleiding wordt uitgedrukt in ampère per volt (A/V), siemens (S) genoemd. Is bv. $I = 2$ ampère als $U = 6$ volt, dan is de geleiding $G = {}^1/_3$ S.

We kunnen ons dezelfde proef ook andersom voorstellen. We leiden verschillende stromen door de draad en meten telkens de spanning, die tussen de uiteinden van de draad optreedt. We constateren daarbij, dat de spanning evenredig is met de stroom, hetgeen we kunnen schrijven als

$$U = R\,I, \quad\quad (2)$$

waarbij R constant is, onafhankelijk van de stroom. We noemen R de weerstand van de draad. De weerstand wordt uitgedrukt in volt per ampère (V/A), ohm (Ω) genoemd (Ω is de Griekse hoofdletter omega). Is bv. weer $U = 6$ volt als $I = 2$ ampère, dan is de weerstand van de draad $R = 3\ \Omega$. De formules (1) en (2) zijn twee verschillende, gelijkwaardige vormen van de wet van Ohm (Duits natuurkundige, 1787—1854).

Uit (1) en (2) volgt $R = \frac{1}{G}$. .... (3)

Van de meeste metalen wordt de weerstand groter bij hogere temperatuur. Van sommige legeringen, zoals nikkelin en constantaan, is de weerstand vrijwel onafhankelijk van de temperatuur. Normaalweerstanden, dat zijn weerstanden, waarvan de grootte zeer nauwkeurig is bepaald en die voor meetdoeleinden dienen (zie Deel 7b, hfdst. II A), worden daarom van deze legeringen gemaakt.

Als we verschillende draden onderzoeken, vinden we, dat de geleiding G evenredig is met de doorsnede en omgekeerd evenredig met de lengte. Maken we dus een draad tweemaal zo lang, dan moeten we er de dubbele spanning aan leggen om er dezelfde stroom door te laten vloeien. Nemen we een draad van dezelfde lengte, doch met een tweemaal zo grote doorsnede, dan vloeit er een tweemaal zo grote stroom door als we er dezelfde spanning aan leggen. Bij draden met dezelfde afmetingen, doch van verschillend materiaal, is het geleidingsvermogen verschillend. Koper geleidt bv. bijzonder goed; daarom worden electrische geleidingen bij voorkeur van koper gemaakt.

Nemen we een geleider van een bepaald materiaal met de eenheid van lengte en de eenheid van doorsnede, en bepalen we hiervan de geleiding volgens (1) door de stroom I en de spanning U te meten, dan kunnen we de geleiding van een geleider uit hetzelfde materiaal met willekeurige afmetingen berekenen. Is de doorsnede A m², de lengte l m, de geleiding van een geleider van 1 m² doorsnede en 1 m lengte γ, dan is de geleiding

$$G = \gamma \, A/l \text{ siemens.} \qquad (4)$$

We noemen γ de soortelijke geleiding; dit is de geleiding van een kubus van 1 m³, gemeten tussen twee tegenover elkaar gelegen zijden. Daar G wordt uitgedrukt in S (siemens), A in m² en l in m, wordt γ uitgedrukt in siemens maal meter lengte gedeeld door m² doorsnede, of kort S/m.

We hebben gezien, dat door een draad, die even lang, doch tweemaal zo dik is als een andere, bij dezelfde spanning tussen de uiteinden een tweemaal zo grote stroom vloeit. De stroom is dus gelijkmatig over de doorsnede van de draad verdeeld. We hebben ook gezien, dat, als door een draad, die dezelfde doorsnede heeft als een andere, doch tweemaal zo lang is, de spanning tussen de uiteinden tweemaal zo groot is. De spanning is dus gelijkmatig verdeeld over de lengte van de draad. Er is een homogene stroom- en spanningsverdeling.

Onder de stroomdichtheid S verstaan we de stroomsterkte I gedeeld door de bijbehorende doorsnede A, gemeten loodrecht op de richting van de stroom, dus de stroom per m² van de doorsnede; de stroomdichtheid S wordt dus gemeten in A/m². Onder de specifieke spanning E verstaan we de spanning U tussen de uiteinden van de draad, gedeeld door de lengte l van de draad, dus de spanning per m lengte,

waarbij l langs de draad, dus langs de stroom wordt gemeten; deze wordt dus gemeten in V/m. Deze specifieke spanning wordt ook de electrische veldsterkte genoemd. We kunnen nu de wet van Ohm, geformuleerd in (1), als volgt herleiden. $I = S\,A$; $G = \gamma\,A/l$ (4); $U = E\,l$. Substitueren we dit in (1), dan vinden we

$$S\,A = (\gamma\,A/l) \times E\,l,$$

waaruit volgt

$$S = \gamma\,E. \qquad (5)$$

Op overeenkomstige wijze kunnen we form. (2) herleiden tot een uitdrukking, waarin alleen specifieke grootheden voorkomen. De weerstand van een kubus van 1 m^3 noemen we de soortelijke weerstand ϱ, dus

$$R = \varrho\,l/A. \qquad (6)$$

Substitueren we (6), $I = S\,A$ en $U = E\,l$ in (2), dan vinden we

$$E\,l = (\varrho\,l/A) \times S\,A,$$

waaruit volgt

$$E = \varrho\,S. \qquad (7)$$

Uit (5) en (7) volgt

$$\varrho = 1/\gamma. \qquad (8)$$

Deze betrekking komt overeen met (3).

We kunnen (1) of (2) beschouwen als de formulering van de gewone wet van Ohm en (5) of (7) als de formulering van de specifieke wet van Ohm. De gewone wet van Ohm geldt niet alleen voor een homogene, overal even dikke draad, maar ook algemeen voor homogene en niet-homogene geleiders van willekeurige vorm. We zijn in het homogene geval, nl. bij een draad van een homogeen materiaal met een constante doorsnede, en de daarbij optredende stroom en spanning overgegaan van (1) op (5) of van (2) op (7) door de stroom te delen door de doorsnede van de draad en de spanning te delen door de lengte van de draad, waardoor we gekomen zijn tot de geleiding resp. de weerstand van een kubus met de eenheid van lengte als lengte en de eenheid van oppervlak als doorsnede. Nemen we niet de spanning van de gehele draad, doch slechts de spanning van een gedeelte, en delen deze spanning door de bijbehorende lengte, dan vinden we dezelfde electrische veldsterkte E; nemen we slechts de stroom door een gedeelte van de doorsnede en delen deze stroom door dit gedeelte van de doorsnede, dan vinden we dezelfde stroomdichtheid S. We kunnen dus tot (5) of (7) komen door slechts een willekeurig klein gedeelte van het geleidende materiaal te beschouwen; steeds vinden we dezelfde soortelijke geleiding γ en dezelfde soortelijke weerstand ϱ.

De wet van Ohm in de specifieke vorm (5) of (7) kunnen we ook gebruiken bij geleiders van willekeurige vorm, inhomogene samenstelling en bij iedere vorm van de banen van de stroom. De electrische

veldsterkte in een punt van de geleider vinden we door de spanning tussen de uiteinden van een klein gedeelte van de stroombaan te bepalen en deze spanning door de afstand, gemeten in de stroomrichting, te delen, en vervolgens de beschouwde lengte steeds kleiner te nemen. De limietwaarde, waartoe de aldus bepaalde veldsterkte nadert, is de veldsterkte E in het beschouwde punt. Op overeenkomstige wijze kunnen we de stroomdichtheid S in een punt vaststellen door de limiet te nemen, waarbij wij de doorsnede loodrecht op de stroomrichting meten. De formules (5) en (7) geven ons dan de soortelijke geleiding γ en de soortelijke weerstand ϱ in het beschouwde punt.

Nemen we in een willekeurige richting over een afstand Δl de spanningsval ΔU en de stroom ΔI door een klein vlakje ΔA loodrecht op de richting van Δl, dan geldt ook de betrekking (5):

$$\frac{\Delta I}{\Delta A} = \gamma \frac{\Delta U}{\Delta l}.$$

Nemen we nu Δl en ΔA steeds kleiner, en gaan we over tot de limiet ($\Delta l \rightarrow 0$ en $\Delta A \rightarrow 0$), dan is

$$\frac{dI}{dA} = \gamma \frac{dU}{dl}.$$

Onder de veldsterkte E in een punt van een willekeurige door een stroom doorlopen geleider verstaan we de grootste daar te meten spanning per lengte-eenheid (de grootste waarde van $\frac{dU}{dl}$). Onder de stroomdichtheid S in een punt van een door een stroom doorlopen geleider verstaan we de grootste daar te meten stroomsterkte per eenheid van oppervlak (de grootste waarde van $\frac{dA}{dI}$). De richting van de stroom is daarbij loodrecht op het oppervlak, evenals de richting van de veldsterkte, en wel gericht van de positieve naar de negatieve pool (van + naar —).

Grootheden, die zijn gekenmerkt door grootte en richting, heten vectoren. De specifieke wet van Ohm, (5) of (7), is een vectorvergelijking, dat wil zeggen dat zij, behalve de verhouding van de waarden van E en S, ook aangeeft, dat E en S dezelfde richting en dezelfde richtingszin hebben. Zoals bij iedere vector, kunnen we E en S in componenten ontbinden (zie hfdst. VI.B.2). De specifieke wet van Ohm geldt ook voor de componenten van E en S in een willekeurige, maar voor beide dezelfde richting. De gegeven definitie van E wordt in de vectorrekening weergegeven door

$$E = -\operatorname{grad} U \qquad (9)$$

(grad is een afkorting voor gradiënt). Het minteken wordt geschreven, omdat E positief is in de richting naar de lagere spanning. Wanneer

we over spanning spreken, bedoelen we de spanning tussen twee punten. We spreken van de *potentiaal* van een punt, als we de spanning bedoelen tussen dat punt en een vast aangenomen punt, waarvoor we gewoonlijk de aarde nemen. Nu zegt verg. (9), dat E gelijk is aan het grootste potentiaalverval daar ter plaatse en de richting heeft van dit potentiaalverval.

Wat er gebeurt, als een stroom door een geleider vloeit, kunnen we ons als volgt voorstellen. Een electrische stroom is een transport van electrische lading. In metalen worden alleen electronen getransporteerd. Een electron bezit een uiterst geringe massa en een negatieve electrische lading. In dynamo's worden deze electronen door het samenwerken van mechanische krachten en magnetische werkingen uit de pluspool weggedreven en in de minpool opgehoopt; bij electrische elementen en accumulatoren geschiedt dit door scheikundige werkingen. Men zegt dan, dat in de pluspool evenveel positieve ladingen aanwezig zijn (dat wil zeggen atomen, die electronen te weinig hebben) als negatieve ladingen (electronen) in de minpool. Tegengestelde ladingen trekken elkaar aan; worden nu de polen door een geleider verbonden, dan kunnen de electronen, die zich in de geleider vrij kunnen bewegen, aan de trek van de veldsterkte langs de geleider gehoorzamen en zich weer met de op hun plaats gebleven positieve ladingen in de pluspool verenigen.

De eenheid van lading is de hoeveelheid lading, die door een stroom van één ampère in één secunde wordt getransporteerd, dus 1 Asec. Deze eenheid van lading wordt ook 1 coulomb (1 C) genoemd.

Een electron heeft de (negatieve) lading

$$e = -1{,}60 \times 10^{-19}\ \mathrm{C}. \qquad (10)$$

De weerstand van een geleider wordt toegeschreven aan de wrijving, die de electronen bij hun beweging door de geleider ondervinden.

Een energiebron (dynamo, element of accumulator), die een gelijkstroom I met behulp van een spanning U door een weerstand R drijft, levert een vermogen

$$P = U\,I \qquad (11)$$

en, daar $U = I\,R$, kan hiervoor ook worden geschreven

$$P = I^2 R = U^2/R. \qquad (12)$$

Dit vermogen wordt uitgedrukt in watt, afgekort W; 1 voltampère = = 1 watt (1 VA = 1 W).

De wrijvingsarbeid der electronen in de geleider gaat als electrische energie verloren en wordt in warmte omgezet. De in t sec verbruikte energie is

$$W = U\,I\,t = P\,t \qquad (13)$$

wattsecunden (Wsec). Een wattsecunde wordt een joule (afgekort J) genoemd. Uit (12) en (13) ziet men, dat het vermogen de energie per secunde is.

De stroomsnelheid der electronen in de geleider is zeer klein; bij de grootste stroomdichtheid, die in de practijk in koper toelaatbaar is (ca 6×10^6 A/m^2), is zij ca 4×10^{-4} m/sec. Verder hebben de electronen nog een beweging ten gevolge van de temperatuur in alle willekeurige richtingen, die gemiddeld nul is. De snelheid van deze beweging is echter zeer groot (ca 2×10^6 m/sec). Ook de voortplantingssnelheid van een inschakelstoot van een stroom, die betrekking heeft op de tijd, na verloop waarvan men in een verderop gelegen punt van de leiding merkt, dat de stroom aan het begin is ingeschakeld, is zeer groot, en kan gelijk aan de lichtsnelheid (ca 3×10^8 m/sec) worden.

De wet van Ohm is, electronenmechanisch beschouwd, niet zo vanzelfsprekend als ze op het eerste gezicht lijkt, doch is in zekere zin een uitzonderlijk geval. Een lichaam, waar een constante kracht op werkt, verkrijgt een eenparig versnelde beweging (zie hfdst. VI). Op de electronen werkt een constante electrische kracht, die de electronen voortdrijft. De gemiddelde snelheid der electronen is echter constant. Een soortgelijk voorbeeld uit de mechanica is het met constante snelheid dalen van stalen bolletjes in een taaie vloeistof, alsmede het uiteindelijk met constante snelheid dalen van een parachute (de luchtweerstand neemt toe met de snelheid). Een verdere voorwaarde voor de evenredigheid van de stroom en de spanning is, dat een voldoend aantal vrije electronen in de geleider ter beschikking staat. Dit is echter bij de practisch voorkomende veldsterkten en de er mee overeenkomende stroomdichtheden steeds wel het geval.

d. Spannings- en stroombronnen in netwerken van weerstanden

In de practijk ontmoeten we vaak meer of minder gecompliceerde netwerken, bestaande uit weerstanden, waarin een of meer spanningsen stroombronnen werkzaam zijn. We wensen dan de stromen door deze weerstanden en de spanningen tussen de uiteinden dezer weerstanden te kennen. Zo vormt een stedelijk electriciteitsnet, waarop een groot aantal lampen, motoren, radiotoestellen, stofzuigers enz. zijn aangesloten, een dergelijk netwerk, waarbij de machines in de electrische centrale de spanning en de stroom leveren. Een ander voorbeeld is de electrische installatie van een auto, waar de accumulator de stroom levert voor de ontsteking, de starter, de claxon en de verlichting. Ook de schakeling van een radio-ontvanger vormt zo'n netwerk.

We beperken ons hier tot netwerken, die uitsluitend weerstanden bevatten, geen zelfinducties en capaciteiten, en waarbij de voedingsbron gelijkstroom levert. De verschijnselen, die bij wisselstroom optreden, worden besproken in Deel 2, hfdst. III.

De inwendige weerstand van electriciteitsbronnen

De spanning tussen de beide klemmen van een spanningsbron, bv. een dynamo of een accumulatorenbatterij, noemen we de klemspanning. Verbinden we de beide klemmen met een weerstand, dan

vloeit er een stroom door deze weerstand. Doch deze stroom vloeit ook door de spanningsbron. Hoe kleiner deze weerstand, des te groter is de stroom. Hierbij merken we op, dat de klemspanning van de bron daalt als de stroom groter wordt. Zo geven de autolampen minder licht als we de auto starten; bij het starten wordt namelijk een zeer grote stroom aan de accumulator van de auto onttrokken. Als we 's avonds thuis een grote electrische kachel inschakelen, kunnen we gewoonlijk een kleine daling van de lichtsterkte in de kamer waarnemen. Deze verschijnselen kunnen we als volgt verklaren.

Indien onze bron geen stroom levert, dus de verbinding met de uitwendig aangebrachte weerstand wordt verbroken, meten we een zekere klemspanning. Deze spanning noemen we de open spanning U_0 van de bron. Deze werd vroeger ook electromotorische kracht, afgekort e.m.k. genoemd. Hiermede wilde men tot uitdrukking brengen, dat dit de kracht is, die de electriciteit door de keten drijft. Verder bezit de bron een zekere inwendige weerstand R_i. Bij een dynamo is dit de weerstand van de wikkelingen van koperdraad op het anker van de machine; bij een accumulator is het de weerstand van het zwavelzuur. Beschouwen we een stopcontact als de bron, dan draagt de weerstand van de leidingen in de muur en in de straat bij tot de inwendige weerstand. We kunnen onze bron nu voorstellen door de open spanning U_0 (zonder weerstand) in serie met de inwendige weerstand R_i. De klemspanning U is dan bij belasting met een weerstand R_u, waarbij een stroom I vloeit (fig. 29),

$$U = U_0 - I R_i. \quad \ldots\ldots (14)$$

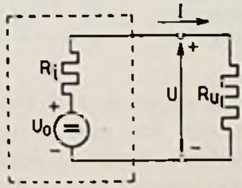


Fig. 29. Spanningsbron met inwendige weerstand R_i, waarop een uitwendige weerstand R_u is aangesloten.

De grootste stroom, die de bron kan leveren, is die, waarbij de gehele beschikbare spanning U_0 wordt verbruikt om de stroom door de inwendige weerstand te drijven. Dan wordt de klemspanning $U = 0$. Deze grootste stroom wordt dus verkregen bij kortsluiting van de klemmen. Daarom noemen we deze stroom de kortsluitstroom I_k. Deze is dus

$$I_k = U_0/R_i. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

Vele van onze gebruikelijke spanningsbronnen, bv. accumulatoren en dynamo's, zouden ernstig worden beschadigd en te warm worden, indien ze werden kortgesloten. Andere spanningsbronnen echter, zoals thermo-elementen en gelijkrichters voor het laden van accumulatoren, kunnen een kortsluiting wel verdragen. Bij onze verdere theoretische beschouwingen slaan we evenwel geen acht op deze practische beperking en rekenen we even goed met de kortsluitstroom I_k als met de open spanning U_0 van een electriciteitsbron.

We kunnen nu het gedrag van onze electriciteitsbron als volgt

beschrijven. Sluiten we aan de klemmen een variabele weerstand R_u aan, die achtereenvolgens alle waarden tussen oneindig (open klemmen) en nul (kortsluiting) aanneemt, dan doorloopt de klemspanning U alle waarden van U_0 tot nul. De stroom, die daarbij van de plusklem door de weerstand R_u naar de minklem vloeit, doorloopt dan alle waarden van nul tot I_k. Hierbij is steeds $U/I = R_u$.

Hetzelfde kan ook anders worden gezegd. Sluiten we tussen de klemmen een variabele weerstand aan, waarvan de geleiding G_u alle waarden tussen oneindig (kortsluiting) en nul (open klemmen) doorloopt, dan doorloopt de stroom alle waarden tussen I_k en nul. De klemspanning U loopt hierbij van nul tot U_0. Steeds is $I/U = G_u$.

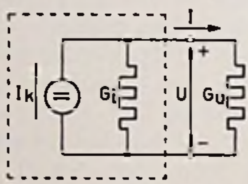


Fig. 30. Stroombron met inwendige geleiding G_i, waarop een uitwendige geleiding G_u is aangesloten.

We kunnen ons deze electriciteitsbron voorstellen als een gesloten doos met twee klemmen, waar we niet in kunnen kijken en waarmee we alleen de juist besproken proeven kunnen nemen door steeds de klemspanning U en de stroom I te meten. Uit het gedrag van de doos zouden we kunnen besluiten, dat zich in de doos de schakeling bevindt, in fig. 29 aangegeven door het omlijnde gedeelte. Toch behoeft dit niet het geval te zijn. De schakeling volgens fig. 30 zou zich op geheel dezelfde wijze gedragen.

In fig. 30 is een geïdealiseerde stroombron aangegeven. Hieronder verstaan we een electriciteitsbron, die onder alle omstandigheden dezelfde stroom I_k levert. In de practijk hebben we meestal electriciteitsbronnen, die vrijwel overeenkomen met de spanningsbron U_0 in fig. 29, dat wil zeggen een bron, waarvan de spanning bij de gebruikelijke stromen practisch niet varieert, dus waarbij de inwendige weerstand R_i verwaarloosbaar klein is. Een ideale spanningsbron, waarbij $R_i = 0$, zou bij alle stroomsterkten dezelfde klemspanning $U = U_0$ behouden. Stroombronnen, waarbij de stroom in alle practische gevallen vrijwel constant is, die dus een ideale stroombron (fig. 30: I_k constant, $G_i = 0$) benaderen, komen minder voor. Als voorbeeld noemen we een penthode (zie Deel 2, hfdst. IV.D.5) en een spanningsbron in serie met een ijzerdraad-waterstof-weerstand. Een ideale stroombron kan ook benaderd worden door een spanningsbron van betrekkelijk hoge spanning in serie te schakelen met een zeer hoge weerstand, waartegenover iedere practisch voorkomende uitwendige weerstand verwaarloosbaar klein is.

In fig. 30 is de ideale stroombron belast met een inwendige geleiding G_i. Is de uitwendige geleiding G_u nul (open klemmen), dan vloeit de gehele stroom I_k door de inwendige geleiding G_i en is dus de klemspanning

$$U = I_k/G_i. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Is de uitwendige geleiding G_u oneindig, dan vloeit de gehele stroom I_k door G_u en is de klemspanning nul.

Bij open en bij kortgesloten klemmen gedragen zich de electriciteitsbronnen volgens fig. 29 en fig. 30 gelijkwaardig, wat klemspanning en klemstroom betreft, als

$$I_k = \frac{U_0}{R_i} \quad \text{en} \quad G_i = \frac{1}{R_i}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Dat zich beide bronnen dan ook bij iedere willekeurige belasting op dezelfde wijze gedragen, vermelden we hier reeds, terwijl we dit pas na de behandeling van de wetten van Kirchhoff zullen toelichten.

We kunnen dus in het algemeen een electriciteitsbron vervangen denken door een spanningsbron, waarvan de spanning, onafhankelijk van de aan de klemmen aangesloten schakeling, gelijk is aan de open spanning, in serie met een inwendige weerstand; ook kunnen we de electriciteitsbron vervangen denken door een stroombron, die onafhankelijk van de aan de klemmen aangesloten schakeling een constante stroom levert, gelijk aan de kortsluitstroom, met een inwendige geleiding parallel. Hierbij moeten we wel bedenken, dat deze gelijkwaardigheid alleen bestaat voorzover het de stromen en spanningen in de uitwendige keten betreft; voor de in de electriciteitsbron zelf (dat wil zeggen in de bovengenoemde „doos") optredende stromen en spanningen bestaat de gelijkwaardigheid niet. Zo wordt bv. bij de voorstelling volgens fig. 29 de doos warm bij kortsluiting van de klemmen; bij de voorstelling volgens fig. 30 wordt de doos daarentegen warm, indien aan de klemmen niets wordt aangesloten.

e. Vervangweerstand resp. -geleiding van serie- en van parallelschakelingen. De wetten van Kirchhoff

De wetten van Kirchhoff beschrijven de spanningsverdeling bij in serie geschakelde en de stroomverdeling bij parallel geschakelde belastingen. Hierbij wordt ook het vervangen van schakelingen, bestaande uit verschillende weerstanden resp. geleidingen, door een enkele aequivalente besproken.

Als we een spanningsbron zonder inwendige weerstand, waarvan de spanning U_0 is, in serie schakelen met twee weerstanden R_1 en R_2 (fig. 31), dan vloeit door de bron, R_1 en R_2 dezelfde stroom I. De spanning over de weerstand R_1 is $U_1 = I\,R_1$; die over de weerstand R_2 is $U_2 = I\,R_2$. De som van deze twee deelspanningen moet gelijk zijn aan de spanning van de bron, dus

$$U_1 + U_2 = U_0. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (18)$$

De stroom door de keten is dezelfde, als de weerstanden R_1 en R_2 worden vervangen door de vervangweerstand $R = R_1 + R_2$, want dan is de stroom $I = U_0/R$ en volgens (18):

$U_1 + U_2 = I R_1 + I R_2 = I R$, waaruit volgt, na deling door I,

$$R_1 + R_2 = R. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

De vervanggeleiding $G = \frac{I}{R}$ van de serieschakeling van de geleidingen $G_1 = 1/R_1$ en $G_2 = 1/R_2$ volgt uit (19):

$$\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} = \frac{1}{G}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

dus

$$G = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

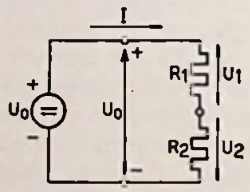


Fig. 31. Spanningsbron zonder inwendige weerstand, waarop de serieschakeling van twee weerstanden R_1 en R_2 is aangesloten.

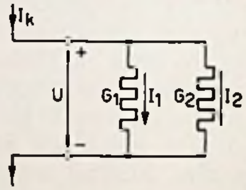


Fig. 32. Stroombron zonder inwendige geleiding, waarop de parallelschakeling van twee geleidingen is aangesloten.

Worden op een stroombron zonder inwendige geleiding twee geleidingen G_1 en G_2 parallel aangesloten (fig. 32), dan staat dezelfde spanning U over de stroombron, G_1 en G_2. De stroom door de geleiding G_1 is $I_1 = U G_1$; die door de geleiding G_2 is $I_2 = U G_2$. De som van deze twee deelstromen is gelijk aan de stroom I_k van de bron, dus

$$I_1 + I_2 = I_k. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

De spanning U is dezelfde, als de geleidingen G_1 en G_2 worden vervangen door de vervanggeleiding $G = G_1 + G_2$, want dan is de spanning I_k/G, en volgens (22): $I_1 + I_2 = UG_1 + UG_2 = UG$, waaruit volgt, na deling door U,

$$G = G_1 + G_2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

De vervangweerstand $R = \frac{I}{G}$ van de parallelschakeling van de weerstanden $R_1 = \frac{1}{G_1}$ en $R_2 = \frac{1}{G_2}$ volgt uit (23):

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

dus

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

We zien, dat de beschouwing van de schakelingen van fig. 31 en 32 in elkaar overgaan, indien we stromen vervangen door spanningen, spanningen door stromen, weerstanden door geleidingen en geleidingen door weerstanden. We noemen dit schematische verband, dat we nog vaker bij de beschouwingen en berekeningen in de electriciteitsleer zullen ontmoeten, *dualiteit*.

We zullen nu aantonen, dat zich de electriciteitsbronnen in fig. 29 (U_0; R_i) en fig. 30 (I_k; G_i) voor een willekeurige uitwendige belasting R_u of $G_u = 1/R_u$ op dezelfde wijze gedragen, dat wil zeggen dezelfde spanning U aan en dezelfde stroom I door deze belasting laten ontstaan, als aan de voorwaarde van (17) is voldaan. Hierbij maken we gebruik van (19) en (23), waarbij we in plaats van R_1 en R_2 resp. G_1 en G_2 nu R_i, R_u, G_i en G_u invullen.

$$\text{Fig. 29:}\quad I = \frac{U_0}{R_i + R_u};\qquad U = I\,R_u = U_0\frac{R_u}{R_i + R_u}.$$

$$\text{Fig. 30:}\quad U = \frac{I_k}{G_i + G_u};\qquad I = U\,G_u = I_k\frac{G_u}{G_i + G_u}.$$

Vervangen we nu in de laatste twee vergelijkingen G_u door $1/R_u$ en verder volgens (17) I_k door U_0/R_i en G_i door $1/R_i$, dan verkrijgen we

$$U = \frac{U_0}{R_i}\,\frac{1}{\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_u}}\quad \text{en}\quad I = \frac{U_0}{R_i}\,\frac{1}{R_u\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_u}\right)},$$

welke U en I na uitwerking dezelfde blijken te zijn als bij fig. 29.

Bij het berekenen van de stromen en spanningen in ingewikkelde schakelingen, bestaande uit een groter aantal weerstanden of geleidingen, waarin zich een of meer electriciteitsbronnen bevinden, met andere woorden netwerken, maken we gebruik van de twee wetten van Kirchhoff. Een netwerk bestaat uit takken; de punten, waar twee of meer takken samenkomen, noemen we knooppunten (bv. B in fig. 34); de weg, die we hebben doorlopen, als we, van een bepaald punt uitgaande, na het doorlopen van een aantal takken en het passeren van een aantal knooppunten in ons uitgangspunt zijn teruggekeerd, noemen we een maas (bv. ABCDA in fig. 33).

De electriciteit, die door de geleiders vloeit, kunnen we vergelijken met water, dat door een stelsel buizen stroomt. Nergens vindt een ophoping der electriciteit plaats; de electriciteit, die in een knooppunt door een of meer takken wordt toegevoerd, wordt door andere takken weer afgevoerd. Noemen we bv. de stroom, die naar het knooppunt toe vloeit, positief en de stroom, die van het knooppunt af vloeit, negatief, dan kunnen we de *eerste wet van Kirchhoff* aldus formuleren.

De algebraïsche som der stromen, die in een knooppunt samenkomen, is nul.

Tussen de uiteinden van iedere tak van een netwerk, waar stroom door vloeit, bestaat een zekere spanning. Tellen we de spanningen op

van de verschillende takken van een maas, die we doorlopen, waarbij we bv. een spanning positief rekenen als we van plus naar min gaan en negatief in het omgekeerde geval, dan kunnen we de *tweede wet van Kirchhoff* aldus formuleren.

De algebraïsche som van de spanningen van de takken van een maas is nul.

Bij (22) hebben we feitelijk al in een zeer eenvoudig geval die eerste wet van Kirchhoff en bij (18) de tweede wet van Kirchhoff toegepast.

f. Enkele rekentechnische toepassingen van de wetten van Kirchhoff (eenvoudige netwerktheorie)

Maasstromen en knooppuntspotentialen

We kunnen in netwerken de optredende stromen en spanningen berekenen met behulp van de wetten van Kirchhoff. In vele gevallen kunnen we echter de berekening op eenvoudiger wijze uitvoeren door de maasstromen en de knooppuntspotentialen te beschouwen. Deze methode is evenwel gebaseerd op de wetten van Kirchhoff. Dit lichten we toe aan een paar voorbeelden. Wij geven dus in dit hoofdstuk geen nieuwe inzichten of wetten, maar willen de lezer in het rekenen met de wetten van Kirchhoff inleiden.

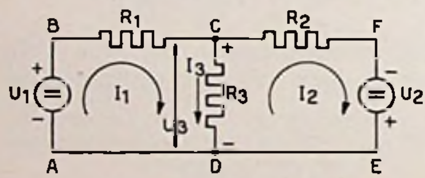


Fig. 33. Het berekenen van de stromen en de spanningen in een netwerk, gevormd door R_1, R_2 en R_3, met behulp van de maasstromen I_1 en I_2. U_1 en U_2 zijn de spanningsbronnen.

In fig. 33 is een schakeling aangeduid, bestaande uit twee spanningsbronnen U_1 en U_2 en drie weerstanden, R_1, R_2 en R_3. In de practijk zou iets dergelijks voorkomen als bv. twee electrische centrales via lange leidingen R_1 en R_2 gemeenschappelijk een grote verbruiker R_3 moesten voeden. Het berekenen van de stromen met behulp van de wetten van Kirchhoff, zoals deze onder *e* zijn geformuleerd, geschiedt als volgt. De som der stromen, die in het knooppunt C samenkomen, is nul, dus

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0. \qquad (26)$$

De som der spanningen langs de maas ABCDA is nul, dus

$$-U_1 + I_1 R_1 + I_3 R_3 = 0. \qquad (27)$$

De som der spanningen langs de maas FEDCF is eveneens nul, dus

$$-U_2 - I_3 R_3 + I_2 R_2 = 0. \qquad (28)$$

We elimineren eerst I_3 door (26) in (27) en (28) te substitueren:

$$\left.\begin{aligned} -U_1 + I_1 R_1 + (I_1 - I_2)\, R_3 = 0; \\ -U_2 + I_2 R_2 + (I_2 - I_1)\, R_3 = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

of, vereenvoudigd,

$$\left.\begin{aligned} I_1\ (R_1 + R_3) - I_2 R_3 = U_1\,; \\ I_2\ (R_2 + R_3) - I_1 R_3 = U_2\,. \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Hieruit volgt

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \frac{R_2 U_1 + R_3 (U_1 + U_2)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}; \\ I_2 &= \frac{R_1 U_2 + R_3 (U_1 + U_2)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}; \\ U_3 = R_3 I_3 = R_3 (I_1 - I_2) &= \frac{R_3 (U_1 R_2 - U_2 R_1)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}. \end{aligned}\right| \qquad (31)$$

Een iets kortere berekening, die evenwel op hetzelfde neerkomt, wordt verkregen door de spanning van een tak, waar tegelijk twee maasstromen in vloeien, op te vatten als de som resp. het verschil van twee aparte spanningen, die ieder van een van deze maasstromen afkomstig zijn. In fig. 33 zijn dat $I_1 R_3$ en $I_2 R_3$. We vinden dan onmiddellijk de vergelijkingen (30). Het genoemde rekenprincipe, om de spanning aan R_3 opgebouwd te denken uit twee op zichzelf staande delen, wordt *superpositie* genoemd; dit principe is toepasbaar, als de waarde van R_3 onafhankelijk is van de er door lopende stroom, of anders gezegd, als het verband tussen stroom en spanning bij R_3 steeds lineair is. Verder zij opgemerkt, dat de hier gegeven vereenvoudigde rekenwijze het bovengenoemde rekenen met maasstromen was.

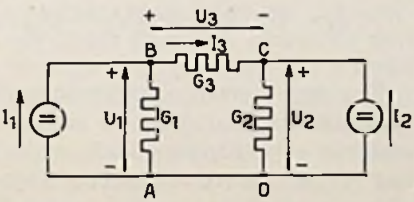


Fig. 34. Het berekenen van de stromen en de spanningen in een netwerk, gevormd door G_1, G_2 en G_3, met behulp van de knooppuntspotentialen U_1 en U_2. I_1 en I_2 zijn de stroombronnen.

In fig. 34 is een schakeling aangegeven, die het duale tegenbeeld van fig. 33 is. Deze schakeling bestaat uit twee stroombronnen I_1 en I_2 en drie geleidingen G_1, G_2 en G_3. Het berekenen van de spanningen met behulp van de wetten van Kirchhoff geschiedt als volgt.

De som der spanningen van de maas BADCB is nul, dus

$$U_1 - U_2 - U_3 = 0. \qquad (32)$$

De som der stromen, die in het knooppunt B samenkomen, is nul, dus

$$I_1 - U_1 G_1 - U_3 G_3 = 0. \qquad (33)$$

De som der stromen, die in het knooppunt C samenkomen, is nul, dus

$$I_2 + U_3 G_3 - U_2 G_2 = 0. \qquad (34)$$

We elimineren eerst U_3 door (32) in (33) en (34) te substitueren en vermenigvuldigen beide leden van deze vergelijkingen met — 1, om een soortgelijke vorm als bij (29) te verkrijgen:

$$\left.\begin{aligned} -I_1 + U_1 G_1 + (U_1 - U_2)\, G_3 = 0; \\ -I_2 + U_2 G_2 + (U_2 - U_1)\, G_3 = 0; \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

of, vereenvoudigd,

$$\left.\begin{aligned} U_1\, (G_1 + G_3) - U_2\, G_3 = I_1; \\ U_2\, (G_2 + G_3) - U_1\, G_3 = I_2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Hieruit volgt:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \frac{G_2 I_1 + G_3 (I_1 + I_2)}{G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3}; \\ U_2 &= \frac{G_1 I_2 + G_3 (I_1 + I_2)}{G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3}; \\ I_3 = G_3 U_3 = G_3 (U_1 - U_2) &= \frac{G_3 (I_1 G_2 - I_2 G_1)}{G_1 G_2 + G_1 G_3 + G_2 G_3}. \end{aligned}\right| \quad \ldots \quad (37)$$

Een iets kortere berekening, die evenwel op hetzelfde neerkomt, wordt verkregen, door de stroom van een tak, tussen de eindpunten waarvan een spanning staat, op te vatten als de som resp. het verschil van twee aparte stromen. Deze stromen zijn ieder afzonderlijk afkomstig van een van de potentialen, waarop de eindpunten van de bedoelde tak zich bevinden. Deze opvatting is eveneens een geval van superpositie. In fig. 34 zijn dat $U_1 G_3$ en $U_2 G_3$. We vinden dan onmiddellijk de vergelijkingen (36). De spanning ten opzichte van een gekozen punt wordt de potentiaal genoemd, bv. ten opzichte van aarde of in fig. 34 ten opzichte van de leiding AD, waarvan de verschillende punten geen onderlinge spanning vertonen. Het eenvoudige van het begrip potentiaal voor het rekenen ligt daarin, dat men na keuze van het nulpunt aan ieder punt een bepaalde potentiaal kan toekennen, terwijl spanning slechts tussen twee punten bestaat; het zal echter duidelijk zijn, dat de invoering van het begrip potentiaal slechts een hulpmiddel is, om gemakkelijker te kunnen rekenen; de physische betekenis is dezelfde als bij de spanning. Verder zij opgemerkt, dat de hier gegeven vereenvoudigde rekenwijze het bovengenoemde rekenen met knooppuntspotentialen was.

Bij fig. 33 spraken we over de superpositie van twee afzonderlijke spanningen $I_1 R_3$ en $I_2 R_3$, bij fig. 34 spraken we over de superpositie van twee aparte stromen $U_1 G_3$ en $U_2 G_3$. Om geen vergissingen te laten ontstaan, willen wij er nog even op wijzen, hoe men in gedachten deze spanningen resp. stromen apart met de juiste waarde kan verkrijgen.

Om $I_1 R_3$ alleen te verkrijgen, dient men de verbinding tussen C en R_2 in fig. 33 door te knippen; voor het apart verkrijgen van $I_2 R_3$

daarentegen de verbinding tussen C en R_1. Om in fig. 34 $U_1 G_3$ alleen te verkrijgen, dient men C op de potentiaal nul te brengen, dat wil zeggen C met D kort te sluiten; voor het apart verkrijgen van $U_2 G_3$ daarentegen B met A.

Wij hebben, zoals al boven werd gezegd, fig. 33 en 34 onderling duaal opgebouwd. Dit is als volgt bereikt. De spanningsbronnen van fig. 33 zijn in fig. 34 door stroombronnen vervangen, de weerstanden door geleidingen, de serieschakelingen door parallelschakelingen. Hierdoor is bereikt, dat de vergelijkingen voor beide schakelingen dezelfde vorm en dezelfde tekens hebben, terwijl ook in de vergelijkingen U door I en R door G is vervangen.

De stelling van Thévenin

Wij beschouwen een doos met twee klemmen, waarin zich een willekeurig netwerk van willekeurig veel electriciteitsbronnen en weerstanden of geleidingen bevindt, dat wil zeggen een zg. tweepool. Wij onderstellen, dat de waarden van de weerstanden resp. geleidingen niet worden beïnvloed door de vloeiende stromen; wij onderstellen verder, dat de electriciteitsbronnen ideale spannings- of stroombronnen zijn, althans zich gedragen als ideale bronnen, desnoods met een constante weerstand of geleiding in serie resp. parallel. Wij kennen de open spanning U_0 en de kortsluitstroom I_k aan de klemmen. Wij besluiten, dat de tweepool een inwendige weerstand $R_i = U_0/I_k$ of, anders gezegd, een inwendige geleiding $G_i = I_k/U_0$ heeft. Volgens Thévenin gedraagt zich deze tweepool, wat stroom en spanning in een uitwendige keten betreft, als een ideale spanningsbron met de spanning U_0 met de weerstand R_i (of een geleiding G_i) in serie resp. als een ideale stroombron met de stroom I_k met een geleiding G_i (of een weerstand R_i) er aan parallel.

De stelling van Thévenin volgt uit de wetten van Kirchhoff. Voor een bewijs zie Deel 2, hfdst. III.C.3; wat daar voor wisselspanningsbronnen en impedanties is gezegd, geldt hier voor gelijkspanningsbronnen en weerstanden. Het bewijs voor stroombronnen en geleidingen laten wij aan de lezer over. Men kan met behulp van deze stelling bepaalde beschouwingen vereenvoudigen. Wij willen bv. in een gecompliceerd netwerk een weerstand variabel maken en de stroom door deze weerstand bij iedere nieuwe waarde weten. Hiertoe behoeven wij dan niet het gehele netwerk steeds opnieuw door te rekenen, als wij met behulp van de stelling van Thévenin één keer de vervangingstweepool voor het resterende netwerk hebben bepaald.

Voor de bepaling van de vervangingstweepool volgens Thévenin kunnen wij ons ook denken, dat wij slechts U_0 kennen en verder de R_i tussen de klemmen bepalen; bij de R_i-bepaling dienen wij de ideale spanningsbronnen in het netwerk door een kortsluiting te vervangen en de verbindingen naar de ideale stroombronnen door te knippen. Men kan ook volstaan met I_k en G_i op overeenkomstige wijze te bepalen.

g. Enkele practische toepassingen van de wetten van Kirchhoff

De potentiometer

Om een variabele spanning ter beschikking te hebben, gebruiken we een potentiometer. Dit is een weerstand met een glijdend contact (fig. 35); deze bezit dus drie aansluitklemmen. De uiteinden A en B worden verbonden met de klemmen van een spanningsbron met verwaarloosbare inwendige weerstand; de instelbare spanning wordt verkregen tussen een der uiteinden en het glijdende contact, bv. tussen A en C. Tussen de klemmen A en C is de spanning

$$U_2 = U\frac{R_2}{R_1 + R_2} = U\frac{R_2}{R}.$$

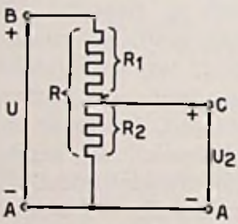


Fig. 35

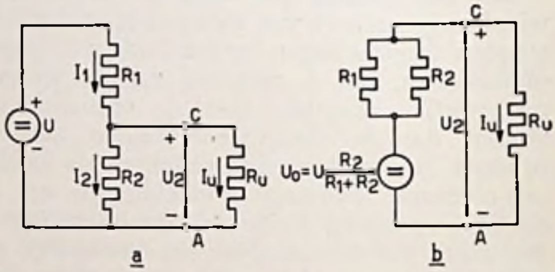


Fig. 36

Fig. 35. Potentiometerschakeling voor het verkrijgen van een variabele spanning U_2. De uiteinden A en B van een weerstand zijn verbonden met een spanning U. Tussen een glijdend contact C en een der uiteinden, bv. A, kan de variabele spanning U_2 worden afgenomen.

Fig. 36. Potentiometer, belast met een weerstand R_u. De schakelingen a en b zijn gelijkwaardig; de klemspanning U_2 is in beide gevallen dezelfde.

We kunnen de schakeling volgens de stelling van Thévenin opvatten als een spanningsbron met de open spanning $U_0 = U\frac{R_2}{R}$ en een inwendige weerstand, gelijk aan de parallelschakeling van R_1 en R_2, dus $R_i = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. In practische gevallen wordt tussen de klemmen A en C gewoonlijk een weerstand R_u aangesloten (fig. 36a). We kunnen dan de schakeling vervangen denken door die van fig. 36b. De klemspanning U_2 tussen de punten A en C is dan

$$U_2 = U_0\frac{R_u}{R_i + R_u} = U_0\frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_u}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

Gewoonlijk wensen we, dat U_2 niet in sterke mate afhangt van de grootte van R_u. Dit is volgens form. (38) het geval, als $R_i << R_u$,

dus $G_i = G_1 + G_2 >> G_u$. We wensen dit bij iedere stand van het contact C. Daarvoor is nodig, dat zowel G_1 als G_2 groot zijn ten opzichte van G_u, dus R_1 en R_2 en dientengevolge ook $R = R_1 + R_2$ klein zijn ten opzichte van R_u. Dit houdt in, dat de stroom door de potentiometer groot is ten opzichte van de stroom door de uitwendige weerstand. Dit blijkt ook als volgt (fig. 36a). $I_1 = I_2 + I_u$; $U_2 = I_2 R_2$. Is I_u klein, dan zijn I_1 en I_2 bijna gelijk en is U_2 ongeveer $\frac{R_2}{R_1 + R_2} U$, dus onafhankelijk van R_u en I_u. Om aan onze wensen te voldoen moet de bron dus een veel grotere stroom leveren dan door de uitwendige weerstand R_u vloeit; het rendement van de potentiometer is dus klein.

De brug van Wheatstone

De brug van Wheatstone dient om een onbekende weerstand door vergelijking met een bekende normaalweerstand te bepalen. Daarvoor gebruiken we een weerstandsdraad van constante doorsnede met een sleepcontact, waarvan de stand op een lengte-indeling kan worden afgelezen. Verder zijn nodig een spanningsbron, waarvan de spanning niet bekend behoeft te zijn en een gevoelige spanningsmeter zonder ijking (galvanometer), die als nul-instrument dienst doet, dat wil zeggen die de afwezigheid van spanning tussen twee bepaalde punten van de brug kan aantonen.

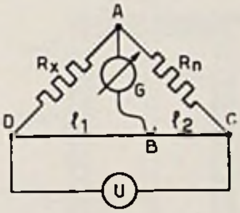


Fig. 37. Brug van Wheatstone. Bepaling van een weerstand R_x door vergelijking met een bekende weerstand R_n. Het sleepcontact B op een weerstandsdraad wordt zo ingesteld, dat de galvanometer G geen spanning aanwijst. De zo bereikte stand kan op een schaalverdeling worden afgelezen (l_1, l_2). U. electriciteitsbron.

In fig. 37 is U de spanningsbron, R_x de onbekende en R_n de normaalweerstand, l_1 en l_2 de sleepdraad. De meting bestaat daarin, dat men het sleepcontact zo instelt, dat de galvanometer G nul aanwijst. In dit geval loopt door G geen stroom, dat wil zeggen R_x en R_n worden door dezelfde stroom (I_1) doorlopen en l_1 en l_2 eveneens door dezelfde stroom (I_2); verder staat tussen A en B geen spanning, dus de spanning AC is gelijk aan de spanning BC en de spanning AD is gelijk aan de spanning BD. De weerstandsverhouding R_1/R_2 van de sleepdraaddelen is gelijk aan de lengteverhouding l_1/l_2, als de sleepdraad uit homogeen materiaal van constante doorsnede bestaat. Hieruit volgt:

$$R_x I_1 = R_1 I_2; \quad R_n I_1 = R_2 I_2; \quad \frac{R_x}{R_n} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{l_1}{l_2},$$

$$\text{dus } R_x = R_n \frac{l_1}{l_2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

5. Capaciteit

Onder een condensator verstaan we twee geleiders, die we bekleedsels noemen, gescheiden door vacuum of door een niet-geleidende stof, die we het diëlectricum of het electricum noemen (vacuum geleidt de electriciteit niet). Vroeger gebruikte men als condensator gewoonlijk een Leidse fles (fig. 38). Dit is een glazen vat, van binnen en van buiten met bladtin beplakt. Tegenwoordig gebruikt men condensatoren in velerlei vormen. Bij micacondensatoren wordt een aantal micaplaatjes op elkaar gestapeld, gescheiden door plaatjes bladkoper. Deze koperplaatjes steken afwisselend naar weerskanten over de mica-isolatie heen. Hieraan zijn twee aansluitingen bevestigd. Bij papiercondensatoren wordt een strook papier, met aan weerszijden een strook bladaluminium, opgerold tot een cilinder. Bij een variabele condensator kan tussen een stel vaststaande metalen platen een ander stel metalen platen draaien; daarbij is de lucht het diëlectricum. Een keramische condensator bestaat uit een keramisch buisje, dat van binnen en van buiten met metaal is bedekt. Deze en andere uitvoeringsvormen van condensatoren zijn beschreven in Deel 3, hfdst. VI.B.

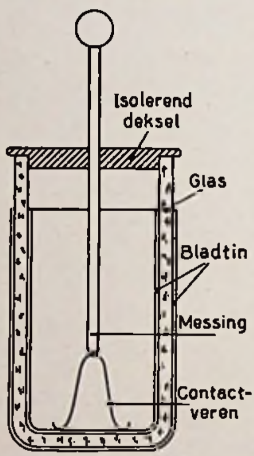


Fig. 38. Leidse fles. Een glazen fles is van binnen en van buiten gedeeltelijk met een metalen folie bekleed. De bekleedsels zijn door het glas van elkaar geïsoleerd. Het bolvormig contact is met het binnenbekleedsel verbonden. Tussen de bekleedsels kan een hoge spanning staan (duizenden volt) zonder dat er vonkoverslag optreedt.

Worden de beide geleiders van een condensator met een gelijkspanningsbron verbonden, waarvan de spanning U bedraagt, dan vloeit electriciteit door de verbindingsdraad totdat de spanning tussen de bekleedsels eveneens U is geworden. We noemen de condensator dan geladen. De hoeveelheid electriciteit, die bij het laden door een der verbindingsdraden is gevloeid, noemen we de lading Q van de condensator. Van de positieve pool van de spanningsbron vloeit evenveel electriciteit naar het ene bekleedsel van de condensator als van het andere bekleedsel van de condensator naar de spanningsbron vloeit.

Het ene bekleedsel verkrijgt dus een even grote positieve lading als het andere een negatieve lading. Onder de stroomsterkte I in de draad verstaan we de hoeveelheid electriciteit, die per secunde door de draad vloeit. Bij een constante stroomsterkte I vloeit door de draad in t sec een lading $I\,t$. Bij het laden van de condensator is de stroom in het algemeen niet constant, en wordt de totale lading $Q = \int I\,dt$.

Zoals wij onder 4.*a* al kort gezegd hebben, wordt de eigenschap van condensatoren, om bij het aanleggen van een spanning een stroomstoot of wel lading op te nemen, capaciteit genoemd.

Wordt bij het laden van een condensator een weerstand R in een der toevoerleidingen opgenomen (fig. 39), dan is de laadstroom des te kleiner naarmate R groter is. Doch bij de kleinere stroom duurt

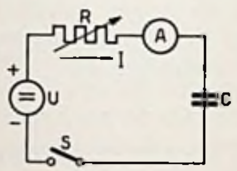


Fig. 39. Het laden van een condensator C over een weerstand R. A. traagheidsloze ampèremeter.

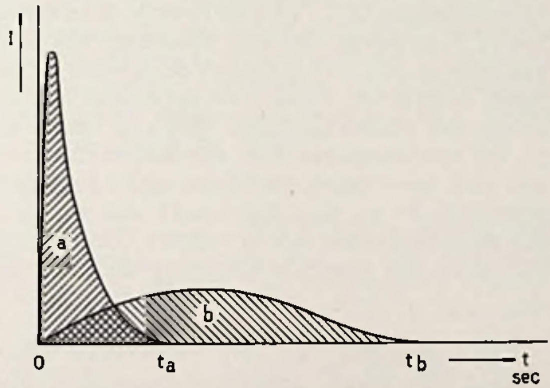


Fig. 40. Verloop van de stroom I als functie van de tijd t bij het laden van een condensator. In het geval a wordt de condensator snel (in t_a sec), in het geval b langzaam (in t_b sec) tot dezelfde spanning geladen. De oppervlakken a en b zijn gelijk.

het langer voor de condensator geheel is geladen en zijn spanning U is geworden. Voor het meten van de stroom dienen we hierbij een ampèremeter met zeer weinig traagheid (bv. een oscillograaf) te nemen. In fig. 40 is de laadstroom als functie van de tijd voorgesteld voor twee verschillende waarden van R, doch gelijke spanningen U van de bron; in het geval a is R kleiner dan in het geval b. De hoeveelheid electriciteit, die door de toevoerleiding is gevloeid, dus de lading Q, die de condensator heeft verkregen, is $\int I\,dt$, en wordt in fig. 40 aangegeven door het oppervlak van de gearceerde figuren. Dit oppervlak is voor beide gevallen gelijk. De lading Q, die de condensator verkrijgt, is dus onafhankelijk van de wijze, waarop deze lading is verkregen, en voor een bepaalde condensator alleen afhankelijk van de spanning U. Meet men de stroomstoot $\int I\,dt = Q$, ook stroomimpuls genoemd, voor verschillende spanningen U bij verschillende condensatoren met vacuum of lucht als diëlectricum, dan blijkt, dat voor eenzelfde condensator de lading Q evenredig is met de spanning U, dus

$$Q = C\,U, \quad \text{.....................} \quad (40)$$

waarbij C de *capaciteit* van de condensator wordt genoemd (bij de meeste isolerende stoffen is dit eveneens het geval). Daar wij stromen

in ampère en de tijd in secunden meten, wordt onder de eenheid van lading, de coulomb (C), eenvoudigheidshalve de ampèresecunde (Asec) verstaan. 1 C is dus de lading, die door een stroom van 1 A in 1 sec wordt overgebracht. De capaciteit C van een condensator geeft volgens (40) aan, hoeveel lading Q er op vloeit, als wij er een bepaalde spanning U aan leggen. Daar wij spanningen in volt meten, wordt onder de eenheid van capaciteit, de farad (F), eenvoudigheidshalve verstaan de C/V of de Asec/V. Een condensator met een capaciteit van 1 F verkrijgt dus een spanning van 1 V, als er gedurende 1 sec een stroom van 1 A is toegevloeid. Voor de practijk is 1 F een te grote maat. Men drukt daarom de capaciteit van een condensator gewoonlijk uit in het millioenste deel van een farad, microfarad (μF) genoemd, of, bij condensatoren met een kleine capaciteit, in het millioenste deel van een microfarad, picofarad (pF) (vroeger micromicrofarad ($\mu\mu$F)) genoemd. Er zij nog opgemerkt, dat wij (40) ook zo mogen opvatten, dat de al bestaande lading van een condensator met ΔQ wordt vergroot als de er aan liggende spanning met ΔU wordt verhoogd, of

$$\Delta Q = C \, \Delta U. \qquad (41)$$

We beschouwen nu een condensator, gevormd door twee op enige afstand van elkaar geïsoleerd opgestelde vlakke metalen platen, met lucht als electricum. We geven deze condensator een lading Q, zodat de lading van de ene plaat $+Q$, die van de andere $-Q$ bedraagt, waardoor de spanning tussen de platen U is geworden. Brengen we nu een klein metalen bolletje, dat we een kleine lading $+Q_1$ hebben meegedeeld, tussen de platen van deze condensator, dan ondervindt dit bolletje een kracht in de richting van de positieve naar de negatieve plaat. Het bolletje tracht zich te bewegen langs een lijn van de positieve naar de negatieve plaat. Dit bracht Faraday er toe, krachtlijnen te denken in de ruimte tussen de platen. Deze ruimte wordt het *electrische veld* genoemd. Onder een *vectorveld* verstaan we in het algemeen een ruimte, waar in ieder punt een bepaald verschijnsel kan optreden, dat naar grootte en richting aangegeven kan worden; in ons geval is dat bv. de kracht op $+Q_1$, die een bepaalde grootte en een bepaalde richting heeft. Om de condensator te laden is een bepaalde electrische energie in de vorm van stroom en spanning nodig geweest. Volgens de gedachtengang van Faraday en Maxwell is deze electrische energie omgezet in energie, die zich bevindt in het electrische veld. Hieraan wordt dan de voorstelling verbonden, dat door het electricum een *electrische flux* Ψ van de lading op de positieve plaat naar de lading op de negatieve plaat gaat, die evenredig is met de lading op de platen en die bij de positieve lading begint en bij de negatieve eindigt.

Van dit electrische veld kunnen we ons een beeld vormen met behulp van een analogie. We denken ons de platen van de condensator in dezelfde stand ten opzichte van elkaar geplaatst in een trog, gevuld met een geleidende vloeistof (electrolytische trog), en de platen verbonden met een spanningsbron. Er vloeit door de vloeistof een

electrische stroom van de positieve plaat naar de negatieve. Het spanningsverloop in dit stroomveld is een beeld van het spanningsverloop in het electrische veld van de condensator. De stroom van de ene plaat naar de andere geeft, wat richting en verdeling aangaat, een getrouw beeld van de electrische flux in de condensator.

De electrische energie is gekarakteriseerd door het product van spanning, stroom en tijd (VAsec). Bij de geladen condensator kunnen we de spanning, die van o tot U volt is gestegen, nog met een voltmeter meten. De ampèresecunden, die we hebben toegevoerd, kunnen we niet meer zien. We kunnen zeggen, dat deze zich als lading Q op de platen bevinden. We kunnen echter ook zeggen, dat deze ampèresecunden worden vertegenwoordigd door de electrische flux Ψ tussen de platen. Het ligt dus voor de hand, te stellen:

$$\Psi = Q \ldots (\text{Asec of C}). \qquad (42)$$

We hebben uit de wet van Ohm (4.*c*) de vectorvergelijking voor het stroomveld in geleiders afgeleid, doordat wij in een homogeen geval van de samenhang tussen de stroom I en de spanning U overgingen tot de samenhang tussen de stroomdichtheid S en de electrische veldsterkte E; hierbij vonden wij het begrip soortelijke geleiding $\gamma \ldots$ (S/m). Op overeenkomstige wijze leiden we nu een vectorvergelijking af voor het electrische veld.

Uit (40) en (42) volgt

$$\Psi = C\,U. \qquad (43)$$

Betreffende de richting is men overeengekomen, te zeggen, dat de electrische flux Ψ in de condensator, evenals de electrische stroom in de weerstand, van plus naar min gaat.

De capaciteitswet (43) geldt voor condensatoren van willekeurige vorm, dus voor willekeurige electrische velden. We beschouwen nu een condensator met een homogeen electrisch veld. Dit homogene veld kan worden verkregen in een condensator, gevormd door twee evenwijdige vlakke metalen platen op een afstand, die klein is ten opzichte van de afmetingen der platen, en waarbij de gehele ruimte tussen de platen, het diëlectricum, vacuum of een homogene isolator is.

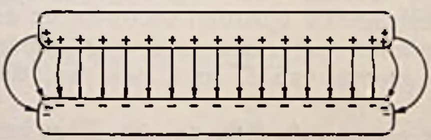


Fig. 41. Geladen vlakke condensator met nagenoeg homogeen veld. De pijlen stellen krachtlijnen voor, welke van de + ladingen naar de — ladingen gaan.

Na het laden van een dergelijke condensator is practisch de gehele lading gelijkmatig verdeeld over de binnenzijde der platen en de gehele flux gaat in gelijkmatige dichtheid langs de kortste weg van de positieve naar de negatieve plaat. Alleen aan de rand van een dergelijke condensator is een verwaarloosbaar klein gedeelte van de lading en de flux inhomogeen verdeeld (fig. 41).

Voor het meten van de lading wordt een ballistische ampèremeter gebruikt. Dit is een ampèremeter, waarbij de eigen slingertijd van de draaispoel groot is ten opzichte van de tijd, gedurende welke de te meten stroom door de spoel vloeit. Bij een dergelijk instrument is de maximale uitslag, die wordt verkregen ten gevolge van een stroomstoot $\int I\,dt$, een maat voor deze stroomstoot.

Uit proeven met dergelijke condensatoren blijkt, dat hun capaciteit C evenredig is met het oppervlak A en omgekeerd evenredig is met de afstand l der platen. Ook het diëlectricum heeft invloed; de kleinste capaciteit wordt verkregen met vacuum.

In analogie met de wet van Ohm kan men zeggen, dat, bij gegeven spanning U, de ontstane electrische flux Ψ evenredig is met de ter beschikking staande doorsnede en dat hij afhankelijk is van het materiaal, waarin hij ontstaat, terwijl de voor het opwekken van een bepaalde electrische flux vereiste spanning des te hoger moet zijn, naarmate de flux een langere weg van de plus naar de min moet afleggen. We kunnen dus ook hier de capaciteitswet (43) in specifieke vorm schrijven, door de karakteristieke grootheden van het electrische veld: spanning en lading of flux, op de eenheden van lengte en oppervlak te betrekken. Voor vacuum als electricum schrijven we nu

$$D = \varepsilon_0 E \ldots (\text{Asec/m}^2 \text{ of C/m}^2). \qquad (44)$$

Hierin is E de specifieke spanning, dit is de spanning, betrokken op de lengte van de weg, die de electrische flux moet afleggen; E wordt uitgedrukt in V/m; E wordt de electrische veldsterkte genoemd. D is de specifieke lading of de specifieke flux, dit is de lading van het oppervlak der platen of de flux per m^2 doorsnede, gemeten in een vlak, loodrecht op de richting van de flux; D wordt uitgedrukt in Asec/m^2 of C/m^2. Deze grootheid werd vroeger wel „diëlectrische verplaatsing" genoemd; we zullen spreken van *electrische inductie*. E en D zijn gerichte grootheden, met andere woorden vectoren, en de specifieke vorm (44) van de capaciteitswet (43) is een vectorvergelijking. Deze geeft behalve de onderlinge grootte van D en E ook aan, dat beide dezelfde richting hebben.

ε_0 is de specifieke capaciteit voor vacuum als diëlectricum. Deze kan men zich voorstellen als de capaciteit van een vacuumcondensator, gevormd door twee vlakke platen met een eenzijdig oppervlak van 1 m^2 en met een onderlinge afstand van 1 m, mits wij zorgen, dat het veld homogeen is; dus weliswaar slordig, maar sprekend gezegd: de capaciteit van de eenheidscondensator met vacuum als diëlectricum, of de capaciteit van 1 m^3 vacuum. ε_0 wordt aangegeven in F maal m afstand per m^2 oppervlakte, dus in F/m (of in Asec/Vm). ε_0 is de diëlectrische constante voor vacuum. We willen deze in navolging van R. W. Pohl [1]) *influentieconstante* noemen. De getalwaarde van ε_0 is dus de lading op de eenheidscondensator met vacuum als electricum bij

[1]) R. W. POHL. Elektrizitätslehre. Springer-Verlag, Berlin.

een spanning van 1 V bij homogene veldverdeling. De veldsterkte E in de ruimte tussen de platen is dan 1 V/m. Het blijkt, dat

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8{,}854 \times 10^{-12} \ldots \text{(F/m of Asec/Vm)}. \quad .. \quad (45)$$

Hierin is c de getalwaarde van de lichtsnelheid in m/sec ($c \approx 3 \times 10^8$). Deze waarde van ε_0 is natuurlijk niet aan een toeval te danken, maar is een gevolg van de eenmaal gemaakte keuze van de eenheid van stroomsterkte (1 A) en de eenheid van spanning (1 V). Deze eenheden heeft men in aansluiting aan vroeger gebruikte eenheden vastgesteld (zie onder 11).

Bevindt zich in plaats van vacuum of lucht een isolerend materiaal tussen de condensatorplaten, dan wordt de capaciteit en daarmee de verhouding van D tot E groter. In dit geval dient in (44) de influentieconstante ε_0 te worden vervangen door de *diëlectrische constante* ε van het desbetreffende materiaal. Het is gebruikelijk, deze soortelijke capaciteit ε aan te geven door de influentieconstante ε_0 te vermenigvuldigen met de relatieve diëlectrische constante ε_r van het betreffende materiaal. ε_r geeft dus aan, hoeveel maal de soortelijke capaciteit van het desbetreffende diëlectricum zo groot is als die van vacuum. Vacuum ($\varepsilon_r = 1$) heeft de kleinste bekende soortelijke capaciteit. De soortelijke capaciteit of wel diëlectrische constante van een willekeurig materiaal is dus

$$\varepsilon = \varepsilon_r \, \varepsilon_0 \ldots \text{(F/m)}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (46)$$

In plaats van (44) verkrijgen we dan

$$D = \varepsilon E = \varepsilon_r \, \varepsilon_0 \, E \ldots (\text{C/m}^2). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (47)$$

Voor een vlakke condensator met homogeen veld, een plaatafstand l en een binnenwaarts oppervlak A van ieder der platen is de capaciteit voor vacuum

$$C = \varepsilon_0 \, A/l \ldots \text{(F)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (48)$$

en voor andere diëlectrica

$$C = \varepsilon \, A/l = \varepsilon_r \, \varepsilon_0 \, A/l \ldots \text{(F)}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

Voor het bepalen van ε kan een condensator met homogeen veld worden benut. Zoals reeds vermeld, kan hiervoor bij benadering dienen een vlakke condensator, waarvan de afmetingen van de platen groot zijn ten opzichte van hun afstand. De homogeniteit van het veld kan echter bij betrekkelijk kleine afmetingen ook verkregen worden door een condensator met schutring (fig. 42). De gehele condensator wordt tot dezelfde spanning geladen; de toevloeiende lading wordt echter alleen gemeten voor de geïsoleerde middenplaat M, waar het veld homogeen is.

Overeenkomstig de bij de wet van Ohm gevolgde gedachtengang (zie 4.c) behouden de bij het homogene electrische veld gedefinieerde specifieke grootheden hun zin, als we in dat veld tot oneindig kleine

afmetingen overgaan. De specifieke capaciteitsvergelijkingen (44) en (47) blijken dan vectorvergelijkingen te zijn, die voor ieder punt van een willekeurig electrisch veld het verband tussen de electrische veldsterkte E en de electrische inductie D naar grootte en richting aangeven. Voor een vlakke condensator met homogeen veld (plaatafstand l, eenzijdig plaatoppervlak A) is het verband tussen de spanning U en de electrische veldsterkte E

$$U = E\,l \quad \ldots\ldots \quad (50)$$

en dat tussen de electrische flux Ψ en de electrische inductie D

$$\Psi = D\,A. \quad \ldots. \quad (51)$$

Voor een condensator met inhomogeen veld wordt dit

$$U = \int_0^l E_l\,dl\,; \quad \ldots. \quad (52)$$

$$\Psi = \int_A D_n\,dA\,. \quad .. \quad (53)$$

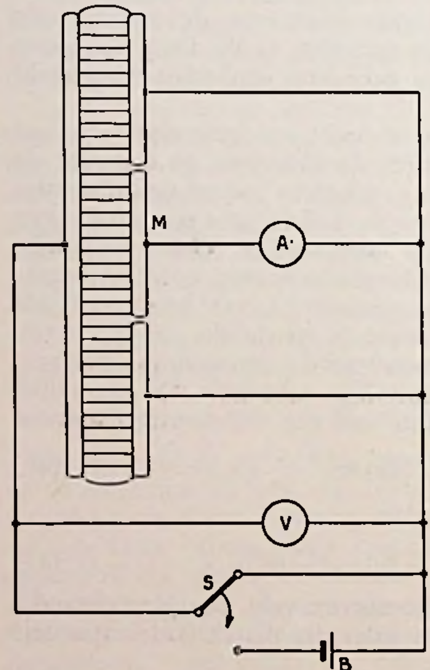


Fig. 42. Vlakke condensator met schutring. Inhomogeniteit van het veld treedt op aan de buitenste rand. Gemeten wordt slechts de lading van het middenstuk M, waar het veld homogeen is. A. ballistische ampèremeter; B. batterij; S. schakelaar voor het laden en ontladen van de condensator; V. voltmeter.

De integraal in verg. (52) betekent, dat we van de ene condensatorplaat naar de andere gaan langs een geheel willekeurige weg, ieder stukje dl van deze weg vermenigvuldigen met de component van E in de richting van dl en deze producten voor de gehele weg samenstellen (integreren). In verg. (53) betekent de integraal, dat we ieder oppervlakte-element dA van een der platen of van een willekeurig vlak in het diëlectricum vermenigvuldigen met de component van D in de richting loodrecht op dA en deze producten voor het gehele oppervlak samenstellen (integreren). Hier rijst nog een moeilijkheid bij het vormen van de begrippen electrische veldsterkte E en electrische inductie D in het electrische veld. Men zal in het algemeen van de begrippen E en stroomdichtheid S in het stroomveld gemakkelijk een voorstelling kunnen vormen, omdat daar tenminste een stroom loopt, waardoor een spanningsval tot stand komt. Bij een electrisch veld in vacuum loopt echter niets en er gebeurt ogenschijnlijk ook niets. Hoe

zal men zich dan voorstellen, dat er op een bepaalde plaats in de ruimte een bepaalde E resp. D aanwezig is? De aanwezigheid van een electrisch veld kan men bv. constateren door de kracht op een lading of door influentieverschijnselen (zie blz. 186). In een vlakke condensator met homogeen veld zijn de E en de D naar grootte en richting bepaald door de spanning, de lading, de afmetingen en de plaatsing van de condensator. Treden nu in een punt in de ruimte dezelfde verschijnselen met dezelfde grootte en richting op als in een punt van het electrische veld van genoemde condensator, dan kennen wij aan het punt in de ruimte ook dezelfde E en D toe.

Op overeenkomstige wijze als we bij het stroomveld onder 4.c hebben aangegeven, kunnen we ook zeggen, dat de specifieke capaciteitswet (44) of (47) niet alleen geldt voor E en D, maar ook voor de componenten daarvan in een willekeurige, maar voor beide dezelfde richting.

Parallel- en serieschakeling van condensatoren

Volgens (40) is de capaciteit C van een condensator bepaald door de stroomstoot of de lading $\int I\,dt = Q$, die er naar toe vloeit, als men een spanning U aan de condensator legt: $C = Q/U$. Schakelen we nu twee condensatoren met de capaciteiten C_1 en C_2 parallel en verbinden we deze parallelschakeling met de spanning U, dan neemt de eerste condensator de lading $Q_1 = C_1 U$ en de tweede condensator de lading $Q_2 = C_2 U$ op. De parallelschakeling neemt dus de lading $Q_1 + Q_2$ op bij de spanning U. Daar $Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)\,U$, neemt bij deze spanning U een condensator met de capaciteit

$$C = C_1 + C_2 \quad \text{(54)}$$

dezelfde lading op als de beide condensatoren met de capaciteiten C_1 en C_2 tezamen. Twee parallel geschakelde condensatoren kan men dus vervangen door een enkele condensator, waarvan de capaciteit de som der capaciteiten is. Algemeen geldt, dat een aantal parallel geschakelde condensatoren kan worden vervangen door een enkele condensator, waarvan de capaciteit de som is van de capaciteiten der parallel geschakelde condensatoren.

Schakelen we twee condensatoren C_1 en C_2 in serie en verbinden we deze serieschakeling met een spanning U, dan vloeit er een lading Q naar toe, en wel wordt dan zowel C_1 als C_2 met dezelfde lading Q geladen, waardoor de deelspanningen U_1 en U_2 aan deze condensatoren ontstaan (fig. 43).

Dit gebeurt als volgt. C_1 heeft de electroden a en b; C_2 heeft de electroden c en d; b is met c verbonden; de spanningsbron ligt met zijn pluspool aan a en met zijn minpool aan d; a verkrijgt de lading $+Q$, d de lading $-Q$. De lading $+Q$ op a trekt uit het middengedeelte b c een lading $-Q$ naar b, terwijl $-Q$ op d uit het middengedeelte $+Q$ naar c trekt. De totale lading van de geleider, bestaande uit de electroden

b en c en hun verbindingsdraad, verandert niet (zie ook de paragraaf „influentie" op blz. 186).

We kunnen de serieschakeling vervangen door een enkele condensator met een capaciteit C, waarvoor geldt:

$$\frac{Q}{C} = U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right).$$

Hieruit volgt, dat

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}.$$

De vervangcapaciteit is dus

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (55)$$

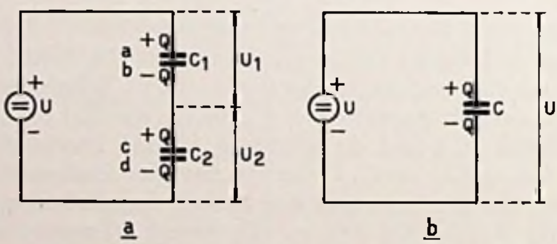


Fig. 43. a. Serieschakeling van twee condensatoren met de capaciteiten C_1 en C_2. De spanningsbron U bewerkt een lading van beide condensatoren met een gelijke lading Q. De deelspanningen U_1 en U_2 zijn omgekeerd evenredig met C_1 en C_2. Daaruit volgt de vervangcapaciteit van de serieschakeling: $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$. b. Het vervangschema voor a.

Op overeenkomstige wijze blijkt, dat bij een serieschakeling van meer condensatoren C_1, C_2, C_3, ... C_n deze kan worden vervangen door een enkele condensator met de capaciteit C, waarvoor geldt:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}.$$

De energie van het electrische veld

De electrische energie, die bij het laden aan een condensator wordt toegevoerd, is $W = \int_0^t U I \, dt$. De verandering van de lading in de tijd dt is $dQ = I\,dt$. Als we de lading, die na een tijd t op de condensator

is getransporteerd, Q noemen, kunnen we ook schrijven $W = \int_0^Q U\,dQ$.

Daar volgens (40) $Q = C\,U$, waarin C constant is, verkrijgen we als totale energie, die nodig is om een oorspronkelijk ongeladen condensator de lading Q te geven,

$$W = \int_0^Q U\,dQ = \frac{1}{C}\int_0^Q Q\,dQ = {}^1/_2\, Q^2/C =$$

$$= {}^1/_2\, C\,U^2 = {}^1/_2\, U\,Q \;\ldots\; (\text{Wsec} = \text{joule}). \quad \ldots\ldots \quad (56)$$

Deze energie is niet verloren, doch kan bij het ontladen van de condensator worden teruggewonnen. We hebben al op de voorstelling gewezen, dat deze energie zich (op onzichtbare wijze) in het electrische veld bevindt. De energiedichtheid in dit veld, dit is de energie per eenheid van volume, is

$${}^1/_2\; D^2/\varepsilon = {}^1/_2\; \varepsilon\; E^2 = {}^1/_2\; E\,D \ldots (\text{Wsec/m}^3) \;\ldots\ldots\; (57)$$

zoals volgt uit (56), (42), (51) en (50).

Ruimtelading

We hebben tot nu toe steeds electrische ladingen beschouwd, die zich binnen de geleiders bevonden, zoals bij electrische stromen, of aan de oppervlakte van de geleiders, zoals bij condensatoren. Een lading kan zich echter ook vrij in de ruimte bevinden, zoals in een electronenbuis het geval is. Daar bewegen zich electronen door een ledige ruimte van de kathode naar de anode (zie Deel 2, hfdst. IV). Electronen zijn negatief geladen deeltjes met een zeer kleine massa. We spreken in dit geval van een *ruimtelading*. Onder de ladingsdichtheid ϱ verstaan we de lading per eenheid van volume; ϱ wordt dus uitgedrukt in Asec/m³ ofwel C/m³. Zijn de ladingen met homogene dichtheid in de ruimte verdeeld, dan is de gehele lading Q, die een volume van V m³ bevat,

$$Q = \varrho\, V. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

Is de verdeling in de ruimte niet homogeen, dan is

$$Q = \int_V \varrho\, dV. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

We hebben gezien, dat van een positieve ladingshoeveelheid Q een electrische flux $\Psi = Q \ldots$ (Asec) uitgaat. Deze flux eindigt ergens bij een even grote negatieve lading. Omgeven we dus een positieve lading Q met een gesloten oppervlak van A m², dan treedt door dit oppervlak de gehele flux Ψ van binnen naar buiten. De flux per eenheid van oppervlak is D; de component van D loodrecht op het omsluitende oppervlak A duiden we aan met D_n. In het geval van een homogene ladingsverdeling in de omsloten ruimte is

$$\int_A D_n \, dA = Q = \varrho V. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (60)$$

Bij een inhomogene ladingsverdeling blijft $\int_A D_n \, dA = Q$. Wij kunnen ook dan spreken van een ladingsdichtheid ϱ, die echter van punt tot punt in de ruimte verschillend is. Bevindt zich in een volume ΔV de lading ΔQ, dan is $\Delta Q = \varrho \Delta A$, dus $\varrho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V}$. Uit (60) volgt dus

$$\varrho = \lim_{V \to 0} \frac{\int_A D_n \, dA}{V} \ldots (\text{C/m}^3), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (61)$$

waarbij A het oppervlak is, dat het volume V omsluit.

We noemen $\lim_{V \to 0} \frac{\int_A D_n \, dA}{V}$ de divergentie van D, afgekort div D, zodat

$$\text{div } D = \varrho. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (62)$$

Influentie

Brengen wij een ongeladen geleider in de buurt van een bv. positief geladen lichaam, dan treedt in de geleider een scheiding van ladingen op; de naar het geladen lichaam toegekeerde kant blijkt negatieve ladingen te bevatten, de andere kant evenveel positieve (fig. 44). Dit

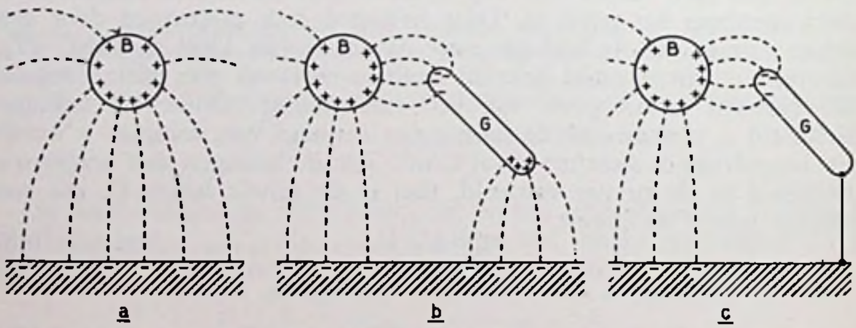


Fig. 44. Influentie. a. Een bolvormig lichaam B werd positief geladen door het met de positieve pool van een batterij te verbinden, waarvan de negatieve pool met aarde was verbonden. In de aarde bevindt zich dan evenveel negatieve lading tegenover het lichaam, als dit positieve lading bevat. b. Een neutrale, dat wil zeggen ongeladen, geleider G wordt in de buurt van B gebracht. In G treedt scheiding der ladingen op. Een gedeelte van de negatieve lading in de aarde verplaatst zich zo, dat deze zich nu tegenover het positief geladen einde van G bevindt. Overal staan positieve en negatieve ladingen paarsgewijze tegenover elkaar. Door G middendoor te snijden zou deze scheiding der ladingen behouden kunnen blijven. c. G wordt met aarde verbonden. De positieve lading van G verenigt zich met de overeenkomstige negatieve lading in de aarde. Na verbreken van de aardverbinding blijft G negatief geladen.

verschijnsel noemt men influentie. Verwijdert men het geladen lichaam, dan verenigen zich de ladingen in de geleider weer en deze is weer overal ongeladen. De ladingsscheiding in de geleider kan behouden blijven als wij deze in geïnfluenceerde toestand in de neutrale zone, dus ongeveer in het midden, doorsnijden. De ene helft van de gescheiden ladingen, in ons voorbeeld de negatieve helft, kan gescheiden behouden blijven, als wij de geleider in geïnfluenceerde toestand even met aarde verbinden en daarna deze verbinding weer doen ophouden. De positieve ladingen stromen dan naar de aarde en verenigen zich daar met de negatieve ladingen, die bij het laden van het positieve lichaam B vrij zijn gekomen. De negatieve ladingen blijven wegens de aantrekkingskracht van het positief geladen lichaam in de geleider (fig. 44c).

6. Zelfinductie

Wij beschouwen een lange, geïsoleerde koperdraad, tot een spoel opgewonden, dat wil zeggen een grote luchtspoel van veel windingen zonder ijzerkern. De uiteinden van deze spoel verbinden wij met een gelijkstroombron, waarbij wij de stroom door de spoel bv. met behulp van een potentiometer kunnen instellen (fig. 45). Bij een bepaalde constante stroom door de spoel zal ten slotte aan de einden van de spoel een spanning optreden, die bepaald is door de weerstand van de koperdraad, waarvan de spoel is gemaakt. Deze spanning meten wij met een voltmeter, waarbij het nulpunt zich in het midden bevindt, zodat wij ook spanningen van omgekeerde, negatieve polariteit direct kunnen aflezen.

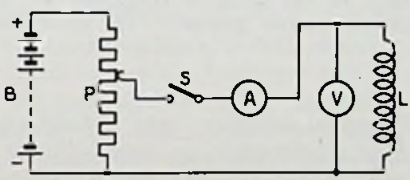


Fig. 45
In- en uitschakelen van de stroom door een spoel L. Het er bij optredende verloop van de spanning aan de spoel als functie van de tijd wordt met een traagheidsloze voltmeter V gemeten. Met behulp van de potentiometer P kan de eindwaarde van de stroom worden ingesteld. B. batterij; S. schakelaar; A. ampèremeter.

Onderbreken wij nu de stroom door de spoel plotseling bv. met behulp van de schakelaar S, waarbij dus de stroom zeer vlug nul wordt, dan zal de voltmeter een kortstondige negatieve uitslag vertonen, die daarna naar nul terugloopt. Sluiten wij de keten weer, dan zal de spanning aan de spoel al direct een betrekkelijk grote positieve waarde, zelfs groter dan de uiteindelijke, aannemen, terwijl de stroom betrekkelijk langzaam de eindwaarde nadert. Heeft de stroom de eindwaarde bereikt, dan heeft ook de spanning aan de spoel weer die waarde, die uit de weerstand van de spoel bij toepassing van de wet van Ohm volgt.

Wij zien hieruit, dat de spanning aan de spoel tijdens *verandering* van de stroom niet uitsluitend door de weerstand van de spoel is bepaald, maar groter is; immers, de spanning moest op ieder moment

evenredig met de stroom zijn, als de spoel alleen weerstand bevatte. Zoals wij onder 4.*a* al kort hebben gezegd, wordt de eigenschap van spoelen, om op stroomveranderingen met het doen ontstaan van spanningen te reageren, zelfinductie genoemd.

Om het gedrag van de zelfinductie apart te bestuderen onderstellen wij, dat de spoel van fig. 45 een verwaarloosbaar kleine weerstand heeft. Wij onderstellen verder, dat de ruimte in en om de spoel lucht of vacuum, dus in het bijzonder geen ijzer of ander magnetisch mamateriaal is. Wij nemen verder aan, dat de voltmeter geen stroom verbruikt en onmiddellijk de aan de uiteinden van de spoel heersende spanning aanwijst, dus iedere verandering van de spanning op de voet kan volgen (deze eisen kunnen bij benadering worden vervuld door een kathodestraaloscillograaf, zie Deel 7a, hfdst. II). Als wij nu een bepaalde eindwaarde van de stroom door de spoel instellen met behulp van de potentiometer, dan kunnen wij deze eindwaarde op verschillende wijzen bereiken. We kunnen bv. bij open schakelaar de potentiometer de juiste stand geven en dan de schakelaar sluiten (a); wij kunnen echter ook bij gesloten schakelaar het glijcontact van de potentiometer van de nulstand langzaam omhoog schuiven, tot de juiste stand is bereikt (b). Als wij nu het verloop van de spanning aan de spoel tijdens (a) resp. (b) vervolgen, dan verkrijgen wij een gedrag als in fig. 46 is weergegeven. Bij het vlugge inschakelen van de stroom verkrijgen wij een kortstondige, maar hevige spanningsstoot, bij het langzaam doen aanstijgen van de stroom ontstaat een kleinere spanning, die een langere tijd blijft bestaan. Is de eindwaarde van de stroom bereikt, dan staat er vrijwel geen spanning meer tussen de einden van de spoel.

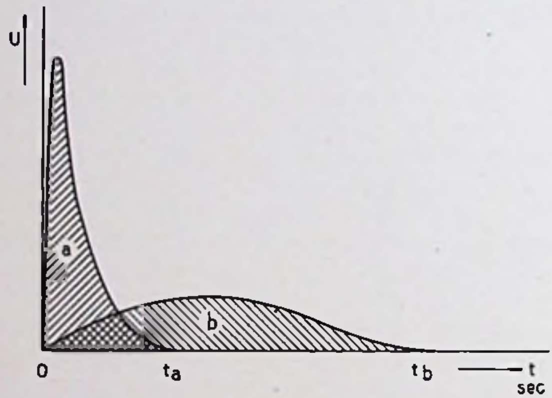


Fig. 46. Verloop van de spanning U als functie van de tijd t bij het op gang brengen van de stroom in een spoel, waarvan de weerstand verwaarloosbaar klein is. In het geval a wordt de stroom snel (in t_a sec), in het geval b langzaam (in t_b sec) op de zelfde waarde gebracht. De oppervlakken a en b zijn gelijk.

Als wij nu in beide gevallen de spanningsstoten of -impulsen $\int_0^t U\,dt$ vergelijken, dat wil zeggen de gearceerde oppervlakken a resp. b in fig. 46, dan blijken deze gelijk aan elkaar te zijn. Meet men

de spanningsstoot $\int_0^t U\,dt$ voor verschillende luchtspoelen bij het inschakelen van verschillende stroomwaarden I, dan blijkt, dat voor eenzelfde spoel de spanningsstoot evenredig is met de stroom I, dus

$$\int_0^t U\,dt = L\,I, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

waarbij L de *zelfinductie* van de spoel wordt genoemd. De zelfinductie L van een spoel geeft dus aan, welke spanningsstoot aan zijn uiteinden optreedt, als wij een bepaalde stroom I door die spoel inschakelen. Daar wij spanningen in volt, spanningsstoten dus in voltsecunden (Vsec), en stromen in ampère meten, wordt onder de eenheid van zelfinductie, de henry (H), eenvoudigheidshalve verstaan de Vsec/A. In een weerstandsloze spoel met een zelfinductie van 1 H zal dus een stroom van 1 A op gang zijn gebracht, als er gedurende 1 sec een spanning van 1 V tussen zijn aansluitingen heeft gestaan.

We merken nog op, dat wij (63) ook zo mogen opvatten, dat de aan een spoel bij het inschakelen van een stroom I al opgetreden spanningsstoot wordt verhoogd als wij de stroom met een bedrag ΔI vergroten, volgens

$$\Delta\left(\int U\,dt\right) = L\,\Delta I. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (64)$$

In de ruimte in en om een spoel, waar stroom door loopt, treden magnetische verschijnselen op; daarom noemt men deze ruimte het magneticum. In het bijzonder wijkt een magneetnaald zo af, dat zij in ieder punt van deze ruimte een bepaalde stand inneemt, waarbij men kan aannemen, dat op de noordpool en op de zuidpool van de magneetnaald twee even grote en tegengesteld gerichte krachten worden uitgeoefend. Dit bracht Faraday er toe, krachtlijnen te denken in de ruimte in en om een dergelijke spoel, die voor ieder punt de richting aangeven, waarin de magneetnaald zich instelt (fig. 47b); ook in de buurt van een niet tot een spoel opgewonden rechte draad, waar stroom door vloeit, werken dergelijke krachten op een magneetnaald, zij het in zwakkere mate (fig. 47a). Zoals wij bij de condensator van een electrisch veld spreken, (zie blz. 178), zo kunnen wij hier van een magnetisch veld spreken, daar wij in ieder punt een verschijnsel kunnen aangeven, dat door grootte en richting is gegeven; in het geval van het magnetisch veld is dat bv. de kracht op de magneetnaald, waarbij wij als de positieve richting die aannemen, waarin de noordpool van deze naald wijst. Om de stroom in de spoel op gang te brengen en daarmede het magnetisch veld te doen ontstaan, is een bepaalde electrische energie in de vorm van stroom en spanning nodig geweest. Volgens de gedachtengang van Faraday en Maxwell is deze electrische energie omgezet in energie, die zich bevindt in het magnetisch veld. Hieraan wordt dan de voorstelling verbonden, dat een magnetische flux Φ de door een stroom doorlopen geleiders omgeeft.

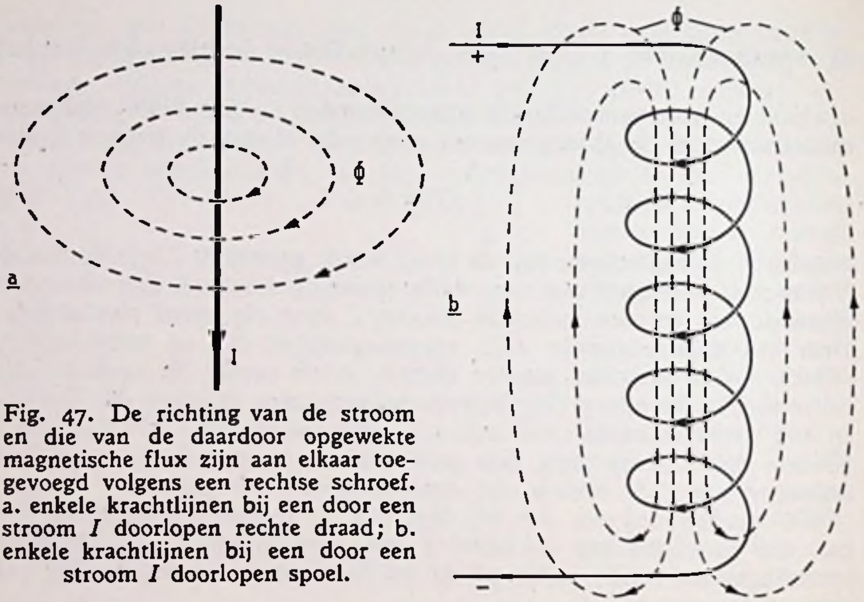


Fig. 47. De richting van de stroom en die van de daardoor opgewekte magnetische flux zijn aan elkaar toegevoegd volgens een rechtse schroef. a. enkele krachtlijnen bij een door een stroom I doorlopen rechte draad; b. enkele krachtlijnen bij een door een stroom I doorlopen spoel.

Bij de geladen condensator kunnen wij ladingen op de platen aannemen, waarvan de electrische flux uitgaat (positieve ladingen) resp. waar deze naar toe gaat (negatieve ladingen); dit vergemakkelijkt de voorstelling. Bij de door een stroom doorlopen spoel daarentegen is er geen analogie met de ladingen; de magnetische flux gaat zonder begin of einde door het binnenste van de spoel en sluit zich buiten om de spoel; ook bij magneten, waar men zich zou kunnen voorstellen, dat de flux bij de noordpool begint en bij de zuidpool eindigt, moet men zeggen, dat de flux zich binnen de magneet van de zuidpool naar de noordpool gaande sluit. Als illustratie hiervoor zij aangevoerd, dat men bij het middendoor breken van een permanente magneet twee stukken met ieder een noord- en een zuidpool verkrijgt. Scheiding der polen is dus zo niet mogelijk, terwijl een scheiding van ladingen wel op deze wijze verkregen kan worden, zoals we bij de influentie (zie blz. 186) hebben besproken.

Bij de geladen condensator konden wij de electrische flux Ψ zonder complicaties gelijkstellen aan de lading op de platen en daarmee ook gelijk aan de stroomstoot $\int_0^t I\,dt$, die bij het inschakelen van de laadspanning U optrad. Bij de spoel, waar stroom door vloeit, zou men met een overeenkomstige redenering graag de flux Φ gelijk willen stellen aan de spanningsstoot $\int_0^t U\,dt$, die bij het inschakelen van de

stroom I optreedt; immers, dan zou beantwoord zijn aan de voorstelling, dat de door het product van stroom, spanning en tijd gekarakteriseerde electrische energie omgezet is in de door stroom en magnetische flux gekarakteriseerde magnetische veldenergie. Hierbij treedt echter nog de volgende complicatie op.

Wij kunnen aan spoelen van dezelfde vorm en wikkelruimte door het vol wikkelen met geïsoleerde draad van verschillende dikte een verschillend aantal windingen geven. Nemen wij bv. twee dergelijke spoelen, waarvan de eerste het dubbele aantal windingen ten opzichte van de tweede heeft, dan blijkt de eerste al bij de halve stroom dezelfde magnetische werking in de ruimte in en om de spoel te geven als de tweede, terwijl bij het inschakelen van deze halve stroomsterkte de dubbele spanningsstoot optreedt, dat wil zeggen de zelfinductie van de eerste spoel is het viervoudige van die van de tweede spoel. Wegens de gelijke magnetische werking zouden wij gaarne aan beide spoelen dezelfde magnetische flux willen toekennen.

Hieraan kunnen wij aan de hand van de volgende gedachtengang tegemoet komen. Als oorzaak voor de magnetische flux kunnen wij de stroom beschouwen. Bij de eerste spoel nu omcirkelt de halve stroom de binnenruimte het dubbele aantal keren, het aantal ampèrewindingen bij beide spoelen is dus hetzelfde, of anders gezegd, de gehele stroom, die door de flux wordt omvat, is in beide gevallen dezelfde. Wij kunnen overgaan tot het extreme geval, dat de gehele wikkelruimte van de bedoelde spoelvorm door een enkele dikke koperwinding wordt ingenomen, waardoor de som van al die stromen vloeit, die anders apart door de verschillende windingen liepen. Dan zouden wij weer dezelfde magnetische werking van de spoel in de ruimte, dus volgens de door ons nagestreefde zienswijze ook dezelfde flux verkrijgen.

Bij deze éénwindingsspoel kunnen wij nu ook de ontstane flux gelijkstellen aan de spanningsstoot $\int_0^t U\,dt$, die bij het inschakelen van een bepaalde stroom I optreedt. Dat bij een luchtspoel van dezelfde vorm, maar met n windingen, bij het inschakelen van hetzelfde aantal ampèrewindingen (dus een stroom I/n), en daarmee het ontstaan van dezelfde flux, de spanningsstoot de n-voudige van die bij de éénwindingsspoel wordt, verklaren wij als volgt. Bij het inschakelen ontstaat in beide gevallen dezelfde flux, die door n resp. door één winding wordt omvat. In iedere winding ontstaat ten gevolge daarvan dezelfde spanningsstoot. Bij de n-windingsspoel zijn de windingen in serie geschakeld, waardoor ook de spanningsstoot het n-voudige wordt.

Bij deze beschrijvingswijze kunnen wij dan voor de *éénwindingsspoel* met verwaarloosbare weerstand stellen:

$$\Phi = \int_0^t U\,dt. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65)$$

Uit (63) en (65) volgt voor de *éénwindingsspoel* met verwaarloosbare weerstand:

$$\Phi = L\,I. \quad\quad (66)$$

Daar wij spanningen in volt en de tijd in secunden meten, wordt onder de eenheid van magnetische flux, de *weber* (Wb), eenvoudigheidshalve verstaan de voltsecunde (Vsec).

Wij kennen aan de magnetische flux Φ de richting toe, waarin de noordpool van een in het magnetisch veld gebrachte magneetnaald wijst. Bij een magneet is dat de richting van de noordpool naar de zuidpool; we merken nog op, dat het magnetisch veld, opgewekt door permanente of electromagneten, van dezelfde aard is als dat van spoelen, waar stroom door vloeit. Voor de richting van de flux, opgewekt door een stroom, geldt de volgende regel:

De richting, waarin een draad of een spoel door een stroom wordt doorlopen en de richting van de er door opgewekte magnetische flux zijn aan elkaar toegevoegd als de voortgaande richting en de draairichting van een rechtse schroef (zie fig. 47a en b).

Wij hebben uit de wet van Ohm (1) de vectorvergelijking (5) voor het stroomveld in geleiders afgeleid, doordat wij in een homogeen geval van de samenhang tussen de stroom $I \ldots$ (A) en de spanning $U \ldots$ (V) overgingen tot de samenhang tussen stroomdichtheid $S \ldots$ (A/m^2) en electrische veldsterkte $E \ldots$ (V/m). Hierbij kwamen wij tot het begrip soortelijke geleiding $\gamma \ldots$ (S/m). Wij hebben uit de capaciteitswet (43) de vectorgelijking (47) voor het electrische veld afgeleid, doordat wij in een homogeen geval van de samenhang tussen de electrische flux $\Psi \ldots$ (C) en de spanning $U \ldots$ (V) overgingen tot de samenhang tussen de electrische fluxdichtheid (verplaatsing, electrische inductie) $D \ldots$ (C/m^2) en de electrische veldsterkte $E \ldots$ (V/m). Hierbij kwamen wij tot het begrip diëlectrische constante $\varepsilon \ldots$ (F/m). Wij zullen nu uit de zelfinductiewet (66) de vectorvergelijking voor het magnetische veld afleiden. Wij zullen daartoe in een homogeen geval van de samenhang tussen de magnetische flux $\Phi \ldots$ (Wb) en de als *magnetomotorische kracht*, dat wil zeggen als de kracht, die de flux door het magneticum drijft, opgevatte gehele stroom (ampèrewindingen) $I \ldots$ (A) overgaan tot de samenhang tussen magnetische fluxdichtheid (magnetische inductie) $B \ldots$ (Wb/m^2) en magnetische veldsterkte $H \ldots$ (A/m); hierbij zullen wij het begrip *permeabiliteit* $\mu \ldots$ (H/m) vinden.

De zelfinductiewet (66) geldt voor éénwindingsspoelen met lucht als magneticum bij willekeurige vormen van de spoel, dus voor willekeurige magnetische velden. Wij beschouwen nu een éénwindingsspoel met een magnetisch veld, dat in de binnenruimte van de spoel homogeen en in de buitenruimte verwaarloosbaar klein is, waarmee we bedoelen, dat het lopen van het magnetisch veld door de buitenruimte de

zelfinductie van de spoel niet noemenswaard beïnvloedt. Dit wordt verwezenlijkt door een „lange" spoel, die bestaat uit één winding, gevormd door een brede metalen strook (fig. 48). Met „lang" bedoelen wij hier, dat de lengte groot is ten opzichte van de dwarsafmetingen (in ons voorbeeld de diameter). Het oppervlak A van de doorsnede van de spoel noemen we het windingsoppervlak. Het magneticum is lucht of vacuum. Sturen wij een gelijkstroom I door deze spoel, dan verkrijgen we in de binnenruimte van de spoel een geconcentreerd en naar verhouding sterk veld, dat, afgezien van de uiteinden der spoel, homogeen is. In de buitenruimte daarentegen is het veld naar verhouding zwak, omdat de flux zich over de gehele ruimte om de spoel verdeelt.

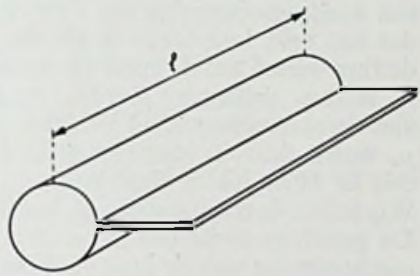


Fig. 48. Lange spoel, bestaande uit één winding, gemaakt van een brede metalen strook. De breedte van de strook is de lengte l van de spoel. De stroom wordt aan de twee parallelle uiteinden toegevoerd.

Uit proeven met dergelijke lange éénwindingsspoelen blijkt, dat hun zelfinductie L evenredig is met het windingsoppervlak A en omgekeerd evendig is met de lengte l der spoel. In analogie met de wet van Ohm kan men zeggen, dat, bij gegeven stroom I, de ontstane magnetische flux Φ evenredig is met het ter beschikking staande windingsoppervlak A, terwijl de voor het opwekken van een bepaalde magnetische flux vereiste stroom des te groter moet zijn, naarmate de flux een langere weg in de spoel af moet leggen. Wij kunnen dus ook hier de zelfinductiewet (66) in specifieke vorm schrijven, door de karakteristieke grootheden van het magnetisch veld: stroom, opgevat als magnetomotorische kracht, en flux op de eenheden van lengte en oppervlak te betrekken. Voor vacuum (en practisch eveneens voor lucht) als magneticum schrijven we nu:

$$B = \mu_0 H \ldots (\text{Vsec/m}^2 \text{ of Wb/m}^2). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (67)$$

Hierin is H de specifieke magnetomotorische kracht, dat wil zeggen de magnetomotorische kracht betrokken op de lengte van de weg, die de magnetische flux in de lange spoel af moet leggen; hierbij nemen wij aan, dat voor de terugweg van de flux buiten om de lange spoel practisch geen magnetomotorische kracht is vereist. Daar wij de magnetomotorische kracht hebben geïdentificeerd met de stroom, die de oorzaak is van deze magnetomotorische kracht, wordt H uitgedrukt in A/m. H wordt de *magnetische veldsterkte* genoemd. B is de specifieke flux, dit is de flux per m² doorsnede, gemeten in een vlak loodrecht op de richting van de flux. Daar wij de magnetische flux hebben geïdentificeerd met de spanningsstoot in de éénwindingsspoel, die bij het ontstaan van de flux optreedt en wij daarom de flux in voltsecunden

ofwel weber meten, wordt B uitgedrukt in Vsec/m². B wordt *magnetische inductie* genoemd. H en B zijn gerichte grootheden, met andere woorden vectoren, en de specifieke vorm (67) van de zelfinductiewet (66) is een vectorvergelijking. Deze geeft behalve de onderlinge grootte van B en H ook aan, dat beide dezelfde richting hebben. μ_0 is de soortelijke zelfinductie voor vacuum als magneticum. Deze kan men zich voorstellen als de zelfinductie van een éénwindingsspoel in vacuum met een windingsoppervlak van 1 m² en een lengte van 1 m, mits we zorgen, dat het veld homogeen is en dat de invloed van het teruglopen van de flux buiten om de spoel op de zelfinductie kan worden verwaarloosd. μ_0 is dus, weliswaar slordig, maar sprekend gezegd, de zelfinductie van de eenheidsspoel in vacuum of de zelfinductie van 1 m³ vacuum. μ_0 wordt daarom aangegeven in H maal m lengte per m² oppervlak, dus in H/m (of in Vsec/Am). μ_0 is de permeabiliteit voor vacuum. Wij willen deze, in navolging van R.W. Pohl, *inductieconstante* noemen. De getallenwaarde van μ_0 is dus de flux door de eenheidsspoel (bij inachtneming van de juist genoemde voorwaarden), bij een stroom van 1 A. Deze getallenwaarde kan als spanningsstoot $\int_0^t U\,dt$ bij het inschakelen van deze stroom worden gemeten. De veldsterkte H in de spoel is dan 1 A/m. Het blijkt, dat

$$\mu_0 = 4\,\pi/10^7 \approx 1{,}257 \times 10^{-6} \quad \ldots \text{(Vsec/Am of F/m)}. \qquad (68)$$

Deze waarde van μ_0 is natuurlijk niet aan een toeval te danken, maar is een gevolg van de eenmaal gemaakte keuze van de eenheid van stroomsterkte (1 A) en de eenheid van spanning (1 V). Deze eenheden heeft men in aansluiting aan vroeger gebruikte eenheden vastgesteld (zie onder 11).

De zelfinductie van een spoel en daarmee de verhouding van B tot H kan een andere waarde verkrijgen als het magneticum niet vacuum of lucht is. In dit geval dient in (67) de inductieconstante te worden vervangen door de *permeabiliteit* μ van het desbetreffende materiaal. Het is gebruikelijk, deze soortelijke zelfinductie aan te geven door de inductieconstante μ_0 te vermenigvuldigen met de relatieve permeabiliteit μ_r van het desbetreffende materiaal. μ_r geeft dus aan, hoeveel maal de soortelijke zelfinductie van het desbetreffende magneticum zo groot is als die van vacuum. De soortelijke zelfinductie ofwel permeabiliteit van een willekeurig materiaal is dus

$$\mu = \mu_r\,\mu_0 \ldots \text{(H/m)}. \qquad (69)$$

In plaats van (67) verkrijgen we dan

$$B = \mu\,H = \mu_r\,\mu_0\,\text{H} \ldots \text{(Wb/m}^2\text{)}. \qquad (70)$$

Voor een lange éénwindingsspoel met homogeen veld, een lengte l en een windingsoppervlak A is de zelfinductie voor vacuum:

$$L = \mu_0 A/l \ldots (\mathrm{H}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (71)$$

en voor andere magnetica:

$$L = \mu A/l = \mu_r \mu_0 A/l \ldots (\mathrm{H}). \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (72)$$

Voor het bepalen van μ kan een éénwindingsspoel met homogeen veld worden benut. Zoals reeds vermeld, kan hiervoor bij benadering dienen een lange spoel, waarvan de lengte groot is ten opzichte van de dwarsafmeting. De homogeniteit van het veld kan echter bij betrekkelijk kleine afmetingen ook verkregen worden door een éénwindingsspoel met schutwindingen (fig. 49). Aan ieder van de drie spoeldelen wordt een stroom evenredig aan zijn lengte toegevoerd. Alle drie stromen worden tegelijk ingeschakeld; de spanningsstoot wordt echter slechts van het middengedeelte gemeten.

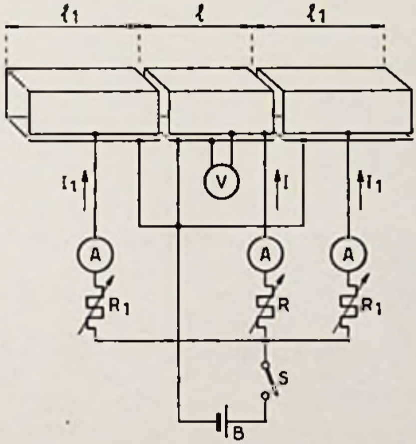


Fig. 49. Spoel, bestaande uit een middenstuk met verlengspoelen. Inhomogeniteit van het magnetische veld treedt aan de uiteinden op. Gemeten wordt alleen de spanningsimpuls van het middenstuk, waar het veld homogeen is, en gelijk aan I / l. A. ampèremeter; B. batterij; R en R_1. regelweerstanden om I_1/l_1 gelijk te maken aan I / l; S. schakelaar voor het in- en uitschakelen van de stromen I en I_1; V. ballistische voltmeter zonder stroomverbruik.

Overeenkomstig de bij de wet van Ohm (zie onder 4.c) en de bij de capaciteitswet (zie onder 5) gevolgde gedachtengang behouden de bij het homogene magnetische veld gedefinieerde grootheden hun zin, als wij in dat veld tot oneindig kleine afmetingen overgaan. De specifieke zelfinductievergelijkingen (67) en (70) blijken dan vectorvergelijkingen te zijn, die voor ieder punt van een willekeurig magnetisch veld het verband tussen de magnetische veldsterkte H en de magnetische inductie B naar grootte en richting aangeven. Voor de terugweg van de flux buiten om een lange spoel is slechts een magnetomotorische kracht nodig, die kan worden verwaarloosd ten opzichte van de magnetomotorische kracht, die nodig is voor de weg van de flux binnen in de spoel. Voor een lange spoel met homogeen veld (lengte l, windingsoppervlak A) is daarom het verband tussen de gehele door de magnetische flux omvatte stroom I en de magnetische veldsterkte H in de binnenruimte van de spoel:

$$I = H\,l. \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (73)$$

Het verband tussen de magnetische flux Φ en de magnetische inductie van de binnenruimte is

$$\Phi = B\,A. \qquad (74)$$

Voor een spoel met inhomogeen veld, die niet lang behoeft te zijn, wordt dit:

$$I = \oint H_l\,dl; \qquad (75)$$

$$\Phi = \int_A B_n\,dA. \qquad (76)$$

Het teken $\oint$, dit is *gesloten lijnintegraal*, betekent, dat men bij het integreren een volledige omloop om de stroom heen tot het uitgangspunt terug moet doen; de weg zelf, waarlangs men deze ene omloop voltrekt, doet er verder niet toe.

Betreffende integreren, het zich voorstellen van H en B in een inhomogeen veld, en de geldigheid van de specifieke zelfinductiewet (67) of (70) verwijzen wij naar de opmerkingen in het hoofdstuk „Capaciteit" na form. (53). Het daar voor E en D gezegde geldt overeenkomstig hier voor H en B.

Serie- en parallelschakeling van zelfinducties

Volgens (63) is de zelfinductie L van een spoel met verwaarloosbare weerstand bepaald door de spanningsstoot $\int U\,dt$, die tussen zijn aansluitingen optreedt, als een stroom I door de spoel vloeit: $\int U\,dt = L\,I$. Deze bepaling van L kunnen wij ook als volgt beschrijven. Leggen we een gelijkspanning U gedurende een zekere tijd t aan de weerstandsloze spoel, dan neemt de stroom eenparig toe. Noemen we de stroom, die op het tijdstip t is bereikt, I, dan is $L = U\,t/I$.

Schakelen we twee weerstandsloze spoelen met de zelfinducties L_1 en L_2 in serie en leggen we de gelijkspanning U tussen de vrije aansluiting van L_1 en die van L_2, dan vloeit dezelfde eenparig met de tijd toenemende stroom door beide spoelen. Deze stroom bereikt op het tijdstip t de waarde I; we noemen de deelspanningen, die aan L_1 en L_2 optreden, U_1 en U_2, en L de vervangzelfinductie van de serieschakeling. Dan geldt:

$$\frac{L\,I}{t} = U = U_1 + U_2 = \frac{L_1\,I}{t} + \frac{L_2\,I}{t}.$$

Hieruit volgt:

$$L = L_1 + L_2. \qquad (77)$$

Op overeenkomstige wijze blijkt, dat de vervangzelfinductie van een aantal in serie geschakelde spoelen de som is der zelfinducties dezer spoelen.

Schakelen we twee weerstandsloze zelfinducties L_1 en L_2 parallel en verbinden we deze parallelschakeling met een gelijkspanning U, dan vloeit door de parallelschakeling een eenparig met de tijd toenemende

stroom, die samengesteld is uit de deelstromen door L_1 en L_2. Wij noemen L de vervangzelfinductie van de parallelschakeling, verder I de stroom hierdoor op het tijdstip t en tenslotte I_1 en I_2 de deelstromen door L_1 en L_2 op hetzelfde tijdstip. Dan is

$$\frac{U\,t}{L} = I = I_1 + I_2 = \frac{U\,t}{L_1} + \frac{U\,t}{L_2}.$$

Hieruit volgt: $$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} = \frac{L_1 + L_2}{L_1\,L_2}. \qquad (78)$$

De vervangzelfinductie is dus: $$L = \frac{L_1\,L_2}{L_1 + L_2}.$$

Op overeenkomstige wijze blijkt, dat de vervangzelfinductie L van een aantal parallel geschakelde spoelen met de zelfinducties L_1, L_2, L_3, ... L_n gegeven wordt door

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \ldots. + \frac{1}{L_n}. \qquad (79)$$

De energie van het magnetische veld

De electrische energie, die bij het op gang brengen van een stroom door een éénwindingsspoel (zonder ijzerkern) met verwaarloosbare weerstand aan de spoel wordt toegevoerd, is $W = \int_0^t I\,U\,dt$. De verandering van de flux in de tijd dt is $d\Phi = U\,dt$. Als we Φ de flux noemen, die na verloop van een tijd t is ontstaan, kunnen we ook schrijven $W = \int_0^t I\,d\Phi$. Daar volgens (66) $\Phi = L\,I$, waarin L constant is, verkrijgen we als totale energie, die nodig is om de flux Φ in een oorspronkelijk niet magnetische éénwindingsspoel op te wekken,

$$W = \int_0^{\Phi} I\,d\Phi = \frac{1}{L}\int_0^{\Phi} \Phi\,d\Phi = {}^1/_2\,\Phi^2/L =$$

$$= {}^1/_2\,L\,I^2 = {}^1/_2\,I\,\Phi \ldots \text{(Wsec)}. \qquad (80)$$

Deze energie is niet verloren, maar kan worden teruggewonnen, als wij bv. zonder onderbreking van de keten, waarin de spoel is opgenomen, de spanningsbron door een weerstand vervangen. Aan deze weerstand zal bij het afnemen van de stroom tot nul een zodanige spanningsstoot optreden, dat de gehele oorspronkelijk aan de spoel toegevoerde energie weer in de weerstand in warmte wordt omgezet. Wij hebben al op de voorstelling gewezen, dat deze energie zich (op onzichtbare wijze)

bevindt in het magnetisch veld. De energiedichtheid in dit veld, dit is de energie per eenheid van volume, is

$$^1/_2\ B^2/\mu = {^1/_2}\, \mu H^2 = {^1/_2}\ H B \ldots (\text{Wsec/m}^3). \quad \ldots\ldots (81)$$

zoals volgt uit (80), (74) en (73).

Spoelen met meer dan één winding

We beschouwen nu spoelen met meer dan één winding. Daarbij gaan we uit van een spoel met één winding van dezelfde vorm en afmetingen. We denken ons de geleider van een lange éénwindingsspoel door een aantal zeer dunne sneden loodrecht op de as van de spoel verdeeld in n van elkaar geïsoleerde windingen. Schakelen we deze windingen parallel, dan merken we geen verschil met de éénwindingsspoel. Bij dezelfde stroom I ontstaat dezelfde flux Φ; de bij het inschakelen optredende spanningsstoot $\int U\,dt$, en dus de zelfinductie L, zijn in beide gevallen even groot.

Schakelen we nu de n windingen in serie en sturen we door de spoel de stroom $I_n = I/n$, dan vloeit door iedere winding dezelfde stroom, die ook bij het parallelschakelen of vóór het verdelen in windingen er doorheen vloeide. De stroomverdeling over het geheel van de geleider, de flux door de spoel, en derhalve de energie van het ontstane magnetisch veld, zijn in de drie gevallen gelijk, dat wil zeggen in form. (80) blijft $W = {^1/_2}\, I\,\Phi$ geldig, als I de gehele door de flux Φ omvatte stroom is, dat wil zeggen bij de spoel met n windingen de stroom vermenigvuldigd met het aantal windingen, dus de ampèrewindingen.

Bij een spoel met n windingen is de spanningsimpuls $\int_0^t U\,dt$ bij dezelfde flux voor iedere winding even groot als bij de spoel met één winding. Daar de n windingen in serie zijn geschakeld, is de totale spanningsimpuls dus n maal zo groot.

Uit (63) volgt nu voor een spoel met n windingen vergeleken met de overeenkomstige éénwindingsspoel

$$L_n = n \int_0^t U\,dt \Big| \frac{I}{n} = n^2 L. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (82)$$

Verg. (66) wordt nu

$$n\Phi = L_n I_n, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (83)$$

waarbij I_n de stroom is door de spoel van n windingen.

De energievergelijking (80) wordt dus

$$W = {^1/_2}\, n^2 \Phi^2/L_n = {^1/_2}\, L_n I_n^2 = {^1/_2}\, n I_n \Phi. \quad \ldots\ldots (84)$$

Bij practische berekeningen verdient het dikwijls aanbeveling, een spoel van meer dan één winding vervangen te denken door een spoel van dezelfde vorm van één winding met dezelfde stroomverdeling en na het uitvoeren van de berekening weer tot de spoel met meer windingen over te gaan.

De specifieke inductiewetten (67) en (70) en de specifieke energievergelijking (81) blijven onveranderd voor spoelen van meer dan één winding.

Magnetica

De zelfinductiewetten in de algemene of in de specifieke vorm voor de magnetische flux vertonen grote overeenkomst met de wetten van Ohm voor de stroom en met de capaciteitswetten voor de electrische flux. Daarom kan men de volgende wijze van voorstellen toepassen. De magnetomotorische kracht van de stroom drijft de magnetische flux door het magneticum zoals de spanning de stroom door de geleider of de electrische flux door het electricum drijft. De zelfinductie bepaalt de grootte van de magnetische flux, op overeenkomstige wijze als de geleiding de grootte van de stroom en de capaciteit de grootte van de electrische flux bepaalt. Evenmin als voor de electrische flux zijn er geen absolute isolatoren voor de magnetische flux, doch voor de geleidingsstroom kennen we behalve vacuum wel materialen, die practisch als volkomen isolatoren kunnen worden beschouwd. Vacuum heeft bij deze manier van spreken de soortelijke geleiding nul voor de stroom, ε_0 voor de electrische flux en μ_0 voor de magnetische flux. μ_0 is ongeveer de kleinste voorkomende waarde van de soortelijke magnetische geleiding, afgezien van enkele diamagnetische stoffen, waarvan μ_r iets kleiner is dan 1.

Er blijven echter ook bij deze wijze van voorstellen verschillen met de electrische flux en ook met de stroom. Bij de verschijnselen, die wij tot nu toe hebben besproken, begint de electrische flux bij een positieve en eindigt bij een even grote negatieve lading. De magnetische flux daarentegen is altijd in zichzelf gesloten; er bestaan geen magnetische ladingen. Bij permanente magneten, waar men aan noord- en zuidmagnetische ladingen zou kunnen denken, hebben wij ons de volgende voorstelling gevormd, als beter met de experimentele feiten in overeenstemming. Ieder molecuul gedraagt zich als een kringstroompje. Deze stroompjes wekken een magnetische flux op, op overeenkomstige wijze als de stroom door een spoel. Deze flux gaat door de magneet en sluit zich buitenom, gaande van de noordpool naar de zuidpool. Hij begint noch eindigt bij de polen.

De geleidingsstroom, die door accumulatoren of dynamo's wordt geleverd, is gesloten; bij condensatoren, die geladen of ontladen worden, is de geleidingsstroom echter niet gesloten.

In werkelijkheid is magnetische flux iets anders dan stroom; bij eerstgenoemde vloeit er niets. Bij materiële magnetica in een door een stroom doorlopen spoel kennen we drie verschillende verschijnselen;

we kunnen de verschillende stoffen naar hun invloed op het magnetische veld in drie soorten verdelen. Sommige stoffen geven een kleine verzwakking van de flux; we noemen deze *diamagnetische* stoffen; hiervoor is μ_r iets kleiner dan 1. Andere geven een kleine versterking van de flux; we noemen deze *paramagnetische* stoffen; hiervoor is μ_r iets groter dan 1. Bij de dia- en paramagnetische stoffen wijkt μ_r minder dan $^1/_{1000}$ van 1 af, zodat we in de practijk hiermee geen rekening behoeven te houden. Enkele stoffen, zoals ijzer, nikkel, cobalt en hun legeringen, en de ferrieten (mengkristallen van bepaalde metaaloxyden) geven een grote versterking van de flux; deze heten *ferromagnetische* stoffen; hiervoor is $\mu_r >> 1$ (bv. 20 tot 20 000).

Van deze drie soorten van beïnvloeding van het magnetische veld door de materie heeft men zich de volgende voorstelling gevormd. Bij de diamagnetische stoffen lopen in de atomen of moleculen oorspronkelijk geen kringstromen; deze worden bij het inschakelen van de stroom door de spoel opgewekt door inductie (zie 7.*b*) en doen een flux ontstaan, die tegengesteld gericht is aan de oorspronkelijke. Bij het uitschakelen van de stroom verdwijnen deze kringstromen weer door de daarbij optredende tegengestelde inductiestoot.

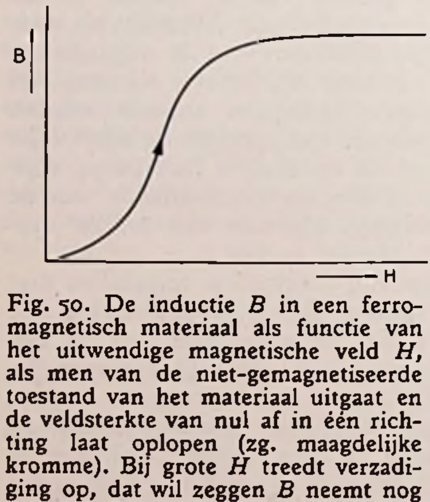


Fig. 50. De inductie B in een ferromagnetisch materiaal als functie van het uitwendige magnetische veld H, als men van de niet-gemagnetiseerde toestand van het materiaal uitgaat en de veldsterkte van nul af in één richting laat oplopen (zg. maagdelijke kromme). Bij grote H treedt verzadiging op, dat wil zeggen B neemt nog slechts toe als in vacuum.

Bij de paramagnetische stoffen zijn de atomen en moleculen al van nature magnetisch door rondlopende en draaiende electronen, die kringstromen vertegenwoordigen. Deze moleculaire magneetjes zijn willekeurig gericht, zodat de velden elkaar naar buiten toe opheffen. Door de invloed van het uitwendig magnetisch veld worden deze elementaire magneetjes meer of minder gericht, waardoor een versterking van de flux ontstaat.

Bij ferromagnetische stoffen zijn een groot aantal moleculaire magneetjes in groepen verenigd al gericht. Een dergelijke groep, die een *gebied van Weiss* wordt genoemd, vormt dus een magneet, die wel klein is, doch veel groter dan de moleculaire magneetjes. De richting van deze magneten (gebieden van Weiss) is bij niet-gemagnetiseerd materiaal willekeurig, zodat hun magnetische velden elkaar naar buiten opheffen. Reeds door een zwak uitwendig magnetisch veld worden deze magneten gericht, zodat een grote versterking van de flux ontstaat. Terwijl bij paramagnetische stoffen de moleculaire magneten bij gebruikelijke veldsterkten nog lang niet alle volledig zijn gericht, komt dit bij ferromagnetische stoffen wel voor. In dit geval wordt het

materiaal *verzadigd*, dat wil zeggen bij verdere verhoging van de veldsterkte H neemt de flux Φ en dus ook de inductie B nog slechts als in vacuum toe (fig. 50). Verdwijnt het uitwendige veld, dan keren bij paramagnetische stoffen de moleculaire magneetjes weer tot de ongeordende toestand terug en is naar buiten geen magnetisme meer te bespeuren. Bij ferromagnetische materialen blijft echter de gemagnetiseerde toestand gedeeltelijk bestaan. Bij zg. magnetisch harde materialen blijven zelfs de meeste elementaire magneetjes na het verdwijnen van het uitwendige veld de verkregen richting behouden; men heeft dan een permanente magneet verkregen.

De moleculaire kringstromen ondervinden geen weerstand, zoals een stroom door een geleidende draad; ze blijven steeds doorlopen, zonder dat er een uitwendige energiebron aanwezig is.

Wat er bij het op gang brengen van de stroom door een vacuumspoel in het magneticum gebeurt, weten we niet. We moeten ons tevreden stellen met de verschijnselen, die we waarnemen, te aanvaarden. We kunnen met de uit spannings- en stroommetingen afgeleide veldgrootheden H en B ook voor de ledige ruimte berekeningen maken en tot juiste conclusies komen, ongeacht of er werkelijk iets verandert in de ruimte in en om een spoel, die door een stroom wordt doorlopen. Het begrip magnetisch veld geeft een gemakkelijke en handige manier van spreken en rekenen, waarbij wij in het midden kunnen laten of de bewegende ladingen in de spoel (dit is de electrische stroom) het enige reële vormen.

Bij het gebruik van vaste magnetica treden in vergelijking met vacuum of lucht enkele complicaties op, die bijzonder opvallend zijn bij de ferromagnetische stoffen. Een gemagnetiseerde ferromagnetische kern in een spoel wordt na het ophouden van de magnetiserende stroom niet volledig onmagnetisch, maar er blijft een zekere *remanente* flux of inductie over. Om deze inductie te laten verdwijnen moet een zekere tegenstroom door de spoel vloeien; de hierdoor opgewekte magnetische veldsterkte noemt men *coërcitiefkracht*. Dientengevolge wordt niet de gehele electrische energie, die oorspronkelijk aan de spoel bij het magnetiseren werd toegevoerd, bij het tot nul laten gaan van de stroom weer teruggewonnen. Men spreekt daarom van de *hysteresis* van de ferromagnetica (zie onder 9).

Bij ferromagnetische materialen is de samenhang tussen $\int U\,dt$ en Φ resp. B als functie van I resp. H niet lineair, dat wil zeggen μ en de zelfinductie L van een spoel met een ferromagnetische kern zijn niet constant. In dit geval gelden de energieformules (80), (81) en (84) niet, omdat de afleiding van deze formules is gebaseerd op de onderstelling, dat L constant is in de betrekking $\Phi = L\,I$. Bij een dergelijke niet-lineaire samenhang moet de energie resp. de energiedichtheid worden bepaald uit de kromme $\Phi = f(I)$ resp. $B = f(H)$. De energie is dan $\int I\,d\Phi$ en de ruimtelijke energiedichtheid $\int H\,dB$. Deze laatste is in fig. 50 bepaald door het oppervlak tussen de kromme en de verticale as.

7. De wetten van Faraday, Biot en Savart, Laplace en Maxwell

a. Inleiding

De door Faraday ontdekte inductiewet zegt, dat door verandering van een magnetisch veld, dat door een draadlus wordt omvat, in deze lus een spanning wordt opgewekt. Maxwell legde aan deze ontdekking de meer algemene gedachte ten grondslag, dat een veranderend magneetveld een electrisch veld opwekt (tweede wet van Maxwell). Hierbij treden electrische krachtlijnen op, die zich om het veranderende magneetveld sluiten. Dit is iets nieuws, want wij hebben tot nu toe alleen electrische velden leren kennen, die van positieve ladingen uitgingen en bij negatieve ladingen eindigden.

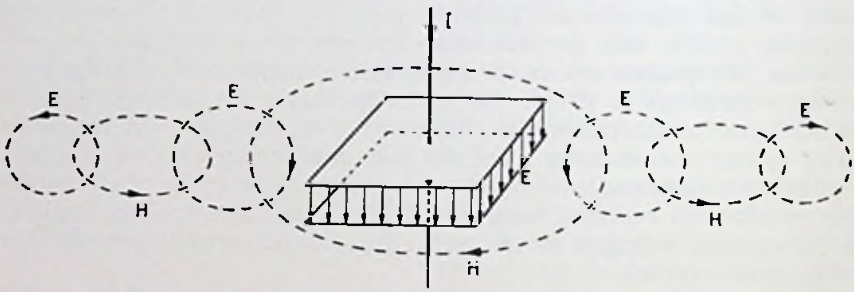


Fig. 51. Vereenvoudigde voorstelling van de voortplanting van een electromagnetische golf. Een veranderend electrisch veld wordt omgeven door een zich er omheen sluitend veranderend magnetisch veld, waarvan de richting loodrecht op die van het electrische veld staat. Het veranderend magnetisch veld wekt weer een zich sluitend veranderlijk electrisch veld op, loodrecht op het magnetisch veld, enz.

Op grond van theoretische overwegingen kwam Maxwell nog op een andere ontdekking. Wij hebben gezien, dat bij het laden van een condensator kortstondig een stroom in de toevoerdraden loopt, terwijl tussen de electroden van de condensator een electrisch veld ontstaat, dat tijdens het laden aangroeit. Is het laden ten einde, dan heeft het electrische veld zijn maximale waarde bereikt, terwijl tegelijk de laadstroom ophoudt. De toevoerdraden zijn, zoals wij eveneens hebben besproken, tijdens het vloeien van de stroom omgeven door een magnetisch veld. Het vermoeden van Maxwell was, dat eveneens het veranderende electrische veld van de condensator een er omheen gesloten magnetisch veld opwekt, op dezelfde wijze als de stroom, die in ons voorbeeld de oorzaak was van het veranderende electrische veld (eerste wet van Maxwell). Dit feit kon toen niet experimenteel worden geverifieerd. Echter kon Maxwell voorspellen, dat er, als zijn vermoeden op waarheid berustte, electromagnetische golven in de

ruimte zouden kunnen bestaan, van dezelfde natuur als lichtgolven. Deze electromagnetische golven zijn later door Hertz aangetoond, waarmede het vermoeden van Maxwell een ontdekking van zeer groot belang bleek te zijn. De bekroning vond Maxwells ontdekking, toen geverifieerd kon worden, dat de electromagnetische velden zich in de ruimte met lichtsnelheid voortplanten.

De voortplanting van electromagnetische golven in de ruimte kan men zich ruwweg als volgt voorstellen. Een veranderend electrisch veld, bv. dat van een condensator, die wordt geladen, omgeeft zich met gesloten magnetische krachtlijnen, waarvan de sterkte eveneens verandert. Deze zich veranderende magnetische krachtlijnen omgeven zich weer met gesloten electrische krachtlijnen, waarvan de sterkte ook weer verandert. Deze omgeven zich weer met gesloten magnetische krachtlijnen enz. (fig. 51).

b. De inductiewet van Faraday. De tweede wet van Maxwell.

Wij denken ons een verliesvrije spoel, dat wil zeggen een spoel, waarvan de wikkeling geen weerstand heeft en waarvan het magneticum vacuum of lucht is. Leggen wij aan een dergelijke spoel met de zelfinductie L een ideale gelijkspanningsbron (dit is zonder inwendige weerstand) met de spanning U, dan wordt de stroom I niet oneindig, maar neemt met nul beginnend eenparig met de tijd t toe: $I = \frac{U}{L}\, t$. Dit experiment kunnen wij in werkelijkheid slechts bij benadering tijdens een korte tijd uitvoeren met een spoel, die een grote zelfinductie met een betrekkelijk kleine weerstand verenigt. Immers als de stroom na verloop van tijd groot wordt, zal de weerstand van de spoel en de inwendige weerstand van de werkelijke spanningsbron (samen R) de uitkomst vervalsen. De invloed van deze weerstanden is echter kort na het inschakelen nog klein, omdat de stroom nog klein is; hier zal dus het eenparig toenemen van de stroom te zien zijn. Even daarna zal de stroom minder snel dan eenparig toenemen, doordat een gedeelte van de spanning in de weerstand van spoel en spanningsbron verloren gaat en dus voor het inductieve gedeelte van de keten slechts een gedeelte van de spanning U beschikbaar blijft. Aan het eind van het inschakelverschijnsel wordt de stroom constant en gelijk U/R; hieruit kunnen wij dan geen gevolgtrekkingen over het gedrag van een ideale zelfinductie in verbinding met een ideale spanningsbron meer maken.

Om te laten zien, dat bij het inschakelen van een werkelijke zelfinductie het boven aangegeven gedrag van een ideale zelfinductie steeds beter wordt benaderd, naarmate de serieweerstand in de keten kleiner is, kunnen wij een reeks inschakelproeven met de schakeling van fig. 52 uitvoeren. Een spanningsbron met de open spanning U staat in serie met een constante zelfinductie L en een variabele weerstand R. Op een ampèremeter A volgen wij het oplopen van de stroom

als functie van de tijd t, nadat wij de keten met behulp van een schakelaar S op het tijdstip $t = 0$ hebben gesloten. Wij herhalen de proef bij verschillende waarden van R. De uitkomst van een dergelijke reeks proeven voor $U = 1$ V, $L = 1$ H en $R = 1$, 0,5 en 0,1 Ω is in fig. 53 weergegeven (in R is ook de weerstand van de spoel en de bron opgenomen gedacht). Wij zien, dat alle krommen bij $t = 0$ en $I = 0$ onder dezelfde hoek α beginnen op te lopen (tg $\alpha = U/L$) en dat bij dalende weerstand het stroomverloop van de werkelijke keten steeds meer de rechte lijn van de ideale keten ($R = 0$) gaat benaderen. Wegens het vrij snelle verloop van het inschakelverschijnsel bij de in de practijk ter beschikking staande zelfinducties zal men met voordeel een oscillograaf (zie Deel 7a, hfdst. II) gebruiken om het verloop van de stroom als functie van de tijd op te nemen.

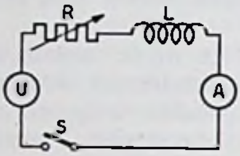


Fig. 52. Schakeling om het stroomverloop als functie van de tijd te kunnen meten bij het aansluiten van een spoel L aan de spanningsbron U. A. traagheidsloze ampèremeter; S. schakelaar; R. variabele weerstand om de invloed van serieweerstand in de keten te kunnen nagaan.

Als wij nu weer tot het gedrag van de ideale spoel, aangesloten aan een ideale spanningsbron, terugkeren, zo kunnen wij dit gedrag in navolging van Faraday's gedachtengang als volgt interpreteren. De veranderende stroom wekt een veranderend magneetveld op, dat door de spoel gaat en zich buiten om de spoel sluit. Dit veranderende magneetveld is kennelijk de oorzaak, dat de stroom niet oneindig wordt, maar eenparig oploopt. Wij hebben vroeger gezien, dat wij de magnetische flux evenredig mogen stellen met de stroom, die hem opwekt. Als de stroom nu hier eenparig oploopt, dan zal de magnetische flux ook eenparig oplopen. Faraday had nu ontdekt, dat een veranderende flux in een spoel aan de uiteinden van deze spoel een spanning doet ontstaan. Wij kunnen het gedrag van onze spoel als volgt beschrijven. De aan de spoel gelegde spanning veroorzaakt een veranderende stroom, die een met hem evenredig veranderende magnetische flux doet ontstaan. Deze veranderende magnetische flux, die binnen door de spoel loodrecht op de stroomrichting gaat, wekt in de spoel een tegenspanning op, en wel zal de flux zo snel oplopen, dat de tegenspanning gelijk en tegengesteld aan de aangelegde spanning wordt.

Omgekeerd kunnen wij dezelfde tegenspanning aan de aansluitingen van de open spoel op zichzelf verkrijgen, als wij van buitenaf dezelfde magnetische flux in dezelfde richting door de spoel sturen en met dezelfde snelheid laten toenemen. Dit kan bv. gebeuren door in een naburige spoel de stroom doorlopend te verhogen. De polariteit van de open aansluitingen is dan dezelfde als voorheen, maar bij het sluiten van de aansluitingen vloeit de stroom in de omgekeerde richting.

Deze proeven zijn modificaties en uitbreidingen van de vroeger

aangegeven proef over zelfinductie (zie blz. 188). Evenals daar worden ook hier de principiële beschouwingen het meest overzichtelijk voor een éénwindingsspoel. De invloed van meer windingen kunnen wij

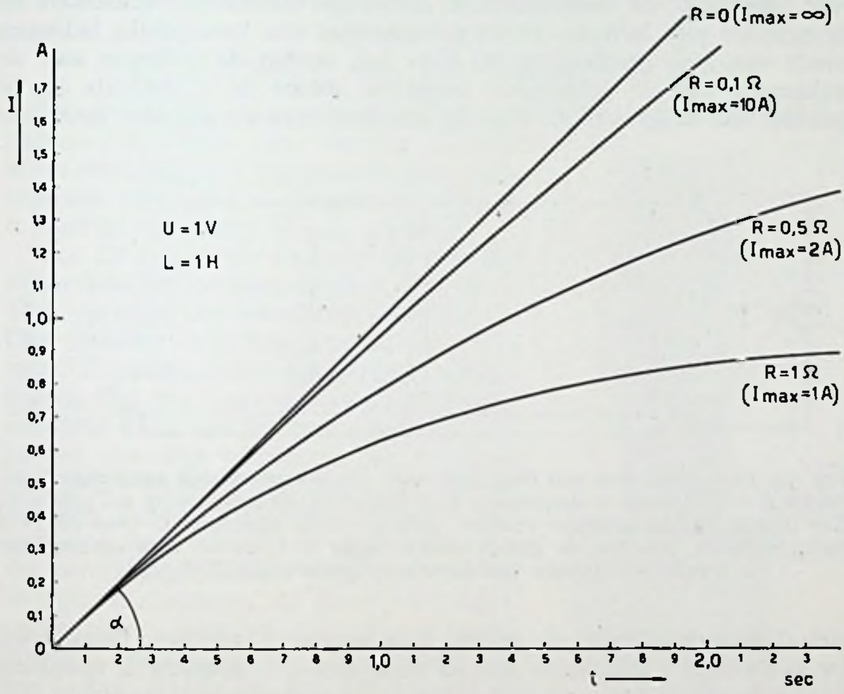


Fig. 53. De stroom als functie van de tijd bij het inschakelen van de schakeling volgens fig. 51 voor verschillende waarden van R. Alle krommen beginnen met dezelfde steilheid. Bij afnemende R benadert het stroomverloop steeds meer een rechte lijn onder de hoek α met de horizontale as (tg $\alpha = U/L$).

gemakkelijk afzonderlijk behandelen, zoals dat ook daar is gebeurd (zie blz. 198).

Voor één winding wordt de inductief opgewekte spanning

$$U = -d\Phi/dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (85)$$

$$[U \ldots (\mathrm{V});\ \Phi \ldots (\mathrm{Wb});\ t \ldots (\mathrm{sec})].$$

Dit is de *inductiewet van Faraday*. Deze geldt algemeen, dat wil zeggen ook voor inhomogene velden. Het minteken zegt, dat de richtingen van deze spanning en van de bij sluiting ontstane stroom tegengesteld zijn aan die, welke door een rechtse schroef aan elkaar zijn toegevoegd (zie blz. 192). Laten wij de flux af- in plaats van toenemen, dan wisselt de polariteit van de aansluitingen, evenals indien

wij de flux wel laten toenemen, maar in de tegengestelde richting door het windingsvlak van de spoel sturen.

Maxwell voegde aan deze formulering van de inductiewet nog een uitbreiding toe. Brengen wij een ongeladen geleider in een electrisch veld, dan blijft de oorspronkelijk aanwezige electrische veldsterkte in de geleider niet bestaan. In de geleider met zijn bewegelijke ladingen treedt een ladingsscheiding op (fig. 44), omdat de ladingen aan de trekkracht van de veldsterkte toegeven, totdat de veldsterkte in de geleider nul is geworden. Aan de ene kant van de geleider bevinden

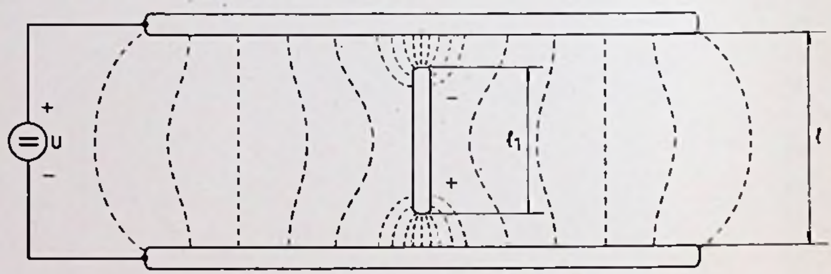


Fig. 54. Een geleider in een electrisch veld. De oorspronkelijk aanwezige veldsterkte $E = U/l$ wordt in de geleider door scheiding der ladingen op nul gebracht. Ter plaatse van de geleider verdeelt zich de totale spanning U over de twee luchtafstanden, waarvan de gezamenlijke lengte $l—l_1$ is. In deze luchtspleten treedt een grotere veldsterkte op [gemiddeld $U/(l—l_1)$].

zich dan positieve, aan de andere kant negatieve ladingen. Nemen wij bv. een vlakke condensator met de plaatafstand l, waaraan de spanning U is verbonden, dan is de veldsterkte in de ruimte tussen de platen U/l. Brengen wij nu een draad ter lengte $l_1 < l$ in deze ruimte (fig. 54), dan verdeelt zich de spanning U ter plaatse van de draad over de twee kleine luchtafstanden, waarvan de gezamenlijke lengte $l - l_1$ bedraagt. In deze luchtspleten zal dus een grotere veldsterkte [gemiddeld $U/(l - l_1)$] optreden. Als wij nu de gezamenlijke spanning over de twee luchtspleten meten (bv. met twee buisvoltmeters), waarbij wij U vinden, dan kunnen wij zeggen, dat deze spanningsmeting er op wijst, dat er vóór het aanbrengen van de draad een electrisch veld tussen de platen bestond, waarvan $\int_0^l E_l \, dl = U$ was (E_l is de component van de veldsterkte in de richting van het wegstukje dl; wij behoeven, als wij op deze wijze integreren, de weg l niet rechtstreeks van de ene plaat naar de andere te kiezen; een dergelijke integratie langs een willekeurig lopende weg l van de ene plaat tot de andere levert steeds dezelfde U op).

Maxwell past nu een dergelijke gedachtengang op de inductiewet

toe. Tussen de uiteinden van een draadwinding, die om een veranderlijk magnetisch veld wordt gelegd, wordt een spanning U gemeten. Dit wijst er op, dat er om dit veranderlijke magnetische veld een gesloten electrisch veld aanwezig is, waarvan de gesloten lijnintegraal $\oint E_l\,dl = U$ is. Uit de inductiewet volgt aldus de *tweede wet van Maxwell:*

$$\oint E_l\,dl = -\,d\Phi/dt \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (86)$$

$[E \ldots (\mathrm{V/m});\ l \ldots (\mathrm{m});\ \Phi \ldots (\mathrm{Wb});\ t \ldots (\mathrm{sec})]$.

Wij willen hier nog even bij blijven staan. De inductiewet (85) is geformuleerd voor één winding. Leggen wij n windingen om het veranderlijke magnetische veld, dan verkrijgen wij ook de n-voudige spanning: $U = -\,n\,d\Phi/dt$.

Van dit feit wordt bv. gebruik gemaakt bij de wisselstroomtransformator. Een ijzerkern verkrijgt een wisselende magnetische flux doordat men wisselstroom door een spoel S stuurt, die op deze kern is aangebracht (fig. 55). Legt men twee windingen om deze kern, dan zal men tussen de uiteinden van deze windingen een tweemaal zo grote wisselspanning meten als bij één winding; bij drie windingen de drievoudige spanning enz. Hierbij zij opgemerkt, dat dit verschijnsel niet in strijd is met de energiewet; immers, de uit de windingen verkrijgbare wisselstroom gaat overeenkomstig omlaag, dat wil zeggen bij drie windingen treedt bij kortsluiting van de uiteinden slechts een derde van de wisselstroom op, die bij één winding optreedt, als wij steeds dezelfde wisselstroom door de magnetiserende spoel S sturen. Hierop wordt nader ingegaan in hfdst. XI.

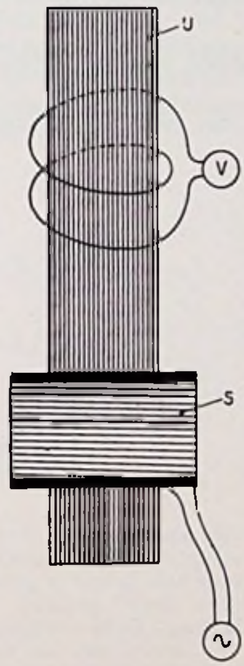


Fig. 55. De ijzerkern IJ verkrijgt een voortdurend wisselende magnetische flux, doordat een wisselstroom de er omheen gewikkelde spoel S doorloopt. In één er om gelegde draadwinding wordt hierbij een zekere wisselspanning opgewekt, in twee windingen de dubbele, in drie windingen de drievoudige enz. De ijzerkern bestaat uit van elkaar geïsoleerde lamellen van ijzerblik, om het ontstaan van in de ijzerkern rondlopende wervelstromen tegen te gaan.

De gesloten lijnintegraal betekent, dat men langs een op zich zelf willekeurige weg weer tot zijn uitgangspunt terugkeert, waarbij men echter slechts één omloop of één omvatting mag doorlopen. Deze voorwaarde is in verband met het zo juist gezegde over de invloed van meer windingen bij de inductiewet begrijpelijk. Over de richting van de omloop is men overeengekomen, dat deze met de omlopen grootheid een rechtse schroef dient te vormen. In ons geval sluit dat in, dat de richting van de Φ met de omloop een rechtse

schroef oplevert, mits de Φ toeneemt. Het minteken zegt, dat men bij deze wijze van omlopen steeds een negatieve veldsterkte ontmoet, dus alsof men van een punt met negatieve spanning naar een met positieve zou lopen.

Wij hebben daarmee twee vormen van electrische velden leren kennen. Bij het veld van de geladen condensator hadden wij krachtlijnen, die we ons konden voorstellen te beginnen bij de positieve ladingen en te eindigen bij de negatieve. De positieve ladingen mag men als bronnen van de electrische flux beschouwen en de negatieve ladingen als de putten van de electrische flux. Berekent men in een dergelijk veld de lijnintegraal $\int_B^A E_l \, dl$ tussen twee punten A en B van dat veld, zo verkrijgt men steeds dezelfde waarde, ongeacht hoe de weg l verloopt en hoeveel keer deze weg bv. de bronnen of putten van het veld omvat. Berekent of meet men in een dergelijk veld een gesloten lijnintegraal $\oint E_l \, dl$, waar men dus langs een willekeurige weg l weer naar het uitgangspunt terugkeert, dan blijkt deze integraal steeds nul op te leveren.

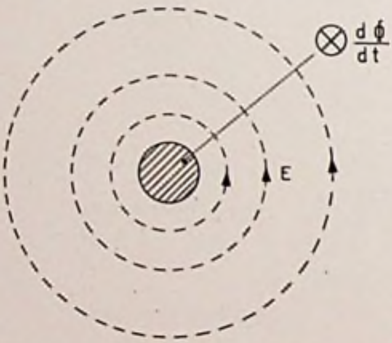


Fig. 56. Een ijzerkern met een sterker wordende magnetische flux, die van voor naar achter is gericht, wordt omgeven door gesloten electrische krachtlijnen. Deze vormen het beeld van een wervel met de veranderlijke flux als wervelcentrum, waarbij de electrische veldsterkte E de door pijlen aangegeven richting heeft.

Anders staat het met het electrische veld, dat om een veranderlijke magnetische flux ontstaat. De electrische krachtlijnen beginnen noch eindigen hier bij ladingen, maar zijn gesloten. Als men in een tekening van deze lijnen de richtingspijlen voor het electrische veld aangeeft, verkrijgt het geheel het aanzien van een wervel met de veranderlijke flux als wervelcentrum (fig. 56). In een dergelijk veld levert de gesloten lijnintegraal $\oint E_l \, dl$ wel iets op, mits het wervelcentrum wordt omvat. Een lijnintegraal $\int_A^B E_l \, dl$ tussen twee punten A en B kan anders zijn, naarmate de weg l links of rechts langs het wervelcentrum van A naar B voert.

Bij het eerste veld spreekt men van een wervelvrij veld en bij het tweede van een bronnenvrij veld. Een aanschouwelijk voorbeeld voor het verschillende gedrag van deze twee veldvormen is een gewone wind vergeleken met een wervelwind. Stel dat je bij een gewone wind

een vierkant omfietst. Het doet er niet toe of je dat rechts- of linksom doet; heb je echter met een wervelwind te maken, waarvan het wervelcentrum in het voornoemde vierkant ligt, dan is er een groot verschil. Er zij opgemerkt, dat dit voorbeeld slechts kwalitatief geldt; numeriek klopt het niet nauwkeurig.

c. De wet van Biot en Savart en de wet van Laplace. De eerste wet van Maxwell

De wet van Biot en Savart en de wet van Laplace houden zich bezig met de magnetische veldsterkte, die in de ruimte wordt opgewekt door een geleider, waar een stroom door vloeit. De eerste wet van Maxwell beschrijft de gehele magnetomotorische kracht van een stroom en formuleert bovendien de belangrijke ontdekking van Maxwell, dat een zich veranderend electrisch veld, de zogenaamde „verplaatsingsstroom", eveneens een magnetisch veld opwekt.

De *wet van Biot en Savart* heeft betrekking op een oneindig lange rechte draad, waar een stroom I door vloeit, die gelijkmatig over de doorsnede van de draad is verdeeld. De veldsterkte H op een afstand r van het centrum van de draad is loodrecht op de draad gericht en is gegeven door

$$H = I/2\pi r \quad (87)$$

$[H \ldots (\mathrm{A/m});\ I \ldots (\mathrm{A});\ r \ldots (\mathrm{m})]$.

Als men de magnetomotorische kracht van een stroom identificeert met deze stroom, zoals wij dat hebben gedaan (zie blz. 192), volgt deze wet uit de symmetrie, daar de magnetische veldsterkte de magnetomotorische kracht per lengte-eenheid is en we bij één omloop om de draad op een afstand r van de draad de weg $2\pi r$ afleggen.

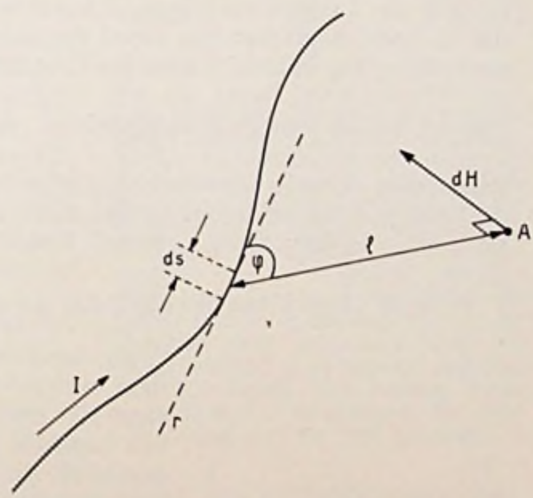


Fig. 57. Wet van Laplace. Door een willekeurig gevormde geleider vloeit de stroom I. Voor de magnetische veldsterkte H in het punt A in de ruimte, dat zich op een afstand l van het geleiderelementje ds bevindt, is de bijdrage dH, afkomstig van dat geleiderelementje, $dH = I\,ds \sin\varphi / 4\pi l^2$. φ is de hoek tussen l en de raaklijn r aan ds. dH staat loodrecht op het vlak door l en r, zo, dat zijn richting en de richting van de stroom aan elkaar zijn toegevoegd volgens een rechtse schroef.

De *wet van Laplace* geeft een formulering voor de samenhang tussen de stroom I door een willekeurig gevormde geleider en de er door opgewekte magnetische veldsterkte H op een afstand l van deze

geleider (fig. 57):

$$dH = I\,ds \sin \varphi / 4\,\pi\,l^2 \quad (88)$$

$[H \ldots (A/m);\ I \ldots (A);\ s \ldots (m);\ l \ldots (m)]$.

Hierin is dH de bijdrage van een door de stroom doorlopen geleider-elementje ds tot de veldsterkte; l is de afstand van het punt, waarvoor H moet worden bepaald, tot ds; φ is de hoek tussen ds en l. dH staat loodrecht op het vlak door ds en l; de richting van dH en de stroom-richtingscomponent loodrecht op l zijn als de draai- en de voort-bewegingsrichting van een rechtse schroef aan elkaar toegevoegd. Om de veldsterkte H te bepalen, dient men al de zo bepaalde bijdragen dH vectorieel op te tellen ofwel vectorieel te integreren.

Voor het rekenen met de wet van Laplace zal men in de meeste gevallen moeten kunnen integreren. De wet van Biot en Savart wordt bijvoorbeeld met behulp van een betrekkelijk eenvoudige integratie uit de wet van Laplace verkregen. Als we echter bij een stroomgeleider, die de vorm heeft van een cirkel met de straal r, waar een stroom I door vloeit (fig. 58), de veldsterkte H in het middelpunt willen bepalen, kunnen wij de vectoriële integratie $\int_0^s ds \sin \varphi / l^2$ zonder bijzondere wiskundige kennis uitvoeren. Immers alle bijdragen dH hebben dezelfde richting loodrecht op het cirkelvlak; ds staat steeds loodrecht op l, sin φ is dus steeds 1, terwijl l voor ieder element ds gelijk r is. $\int_0^s ds$ is de omtrek van de cirkel, dus $2\,\pi\,r$ en wij verkrijgen $H = I/2r$.

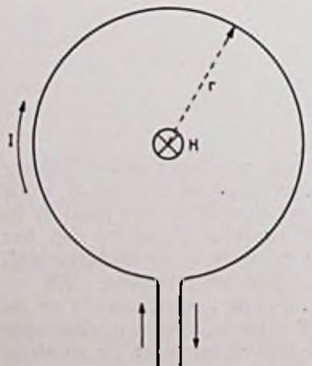


Fig. 58. Bepaling van de magnetische veldsterkte H in het middelpunt van een cirkelvormige geleider met de straal r, waardoor een stroom I vloeit. Uit de wet van Laplace [form. (88)] volgt: $H = I / 2\,r$.

De lezer zal bij het beschouwen van deze wetten misschien vragen, wat het eigenlijk physisch betekent, als ik voor een bepaalde plaats in de ruimte heb uitgerekend, dat daar de magnetische veldsterkte zo en zo groot is en die en die richting heeft. De physische betekenis is de volgende. Breng naar de bedoelde plaats een klein langwerpig, bv. cilindrisch luchtspoeltje, waarvan de lengte groot is ten opzichte van de diameter; geef de as van de spoel de richting, die H daar ter plaatse volgens de gegeven wetten moet hebben. Stuur een stroom door het spoeltje zodanig, dat in de ruimte in het spoeltje geen magnetische werkingen meer optreden. Het daarvoor nodige aantal ampèrewindingen van het spoeltje gedeeld door zijn lengte blijkt gelijk aan de voor H berekende waarde te zijn.

We komen nu tot de eerste wet van Maxwell. Deze bestaat uit twee delen. Het eerste gedeelte formuleert de samenhang tussen een stroom en de er door opgewekte magnetische veldsterkte als volgt:

$$\oint H_l \, dl = I \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (89)$$

$$[H \ldots (\mathrm{A/m});\; l \ldots (\mathrm{m});\; I \ldots (\mathrm{A})].$$

Wij zijn deze wet eigenlijk al bij de definitie van H aan de hand van de proeven met de lange éénwindingspoel tegengekomen en bovendien bij de rechte oneindig lange draad bij de wet van Biot en Savart. Hier vinden wij dan echter een algemene formulering, die voor willekeurige vormen van een geleider en één omloop of omvatting langs een willekeurige weg l is opgesteld. De in de vectorrekening geoefende kan dan ook aantonen, dat de eveneens algemeen geformuleerde wet van Laplace dit gedeelte van de eerste wet van Maxwell inhoudt. Het magnetische veld om een stroom heeft, zoals wij uit (89) zien, de gedaante van een bronvrij veld, waarvan de stroom het wervelcentrum is.

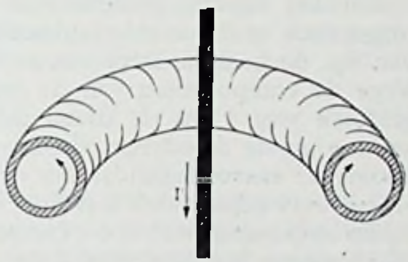


Fig. 59. Draad, waar een stroom I door vloeit, en die door een kortgesloten ringspoel één keer wordt omvat. Bij het inschakelen van de stroom in de draad ontstaan in de geleiders van de ringspoel stromen, waarvan de som gelijk is aan de ingeschakelde stroom en waarvan de richting aan de binnenzijde van de ringspoel tegengesteld is aan die van de stroom in de draad. Hierbij is ondersteld, dat de ringspoel geen weerstand bezit en dichtgewikkeld is of uit een gesloten holle geleidende ring bestaat, zoals in de figuur is voorgesteld. De ring is slechts voor de helft getekend.

Om de physische betekenis van (89) nog duidelijker te maken, beschouwen wij de geïdealiseerde proef van fig. 59. Een draad is één keer omvat door een kortgesloten ringspoel. Deze ringspoel kan dicht gewikkeld zijn met vele windingen of uit een holle geleidende ring bestaan. Wij onderstellen, dat de ringspoel geen weerstand heeft. Schakelen wij een stroom I in, die door de draad loopt, dan ontstaan in de ringspoel stromen, waarvan de som gelijk is aan de ingeschakelde stroom, terwijl hun richting aan de binnenkant tegengesteld is aan de stroom in de draad. Hierbij kan de ringspoel een willekeurige vorm en lengte hebben; hij kan scheef en onsymmetrisch om de draad liggen, mits slechts de binnenruimte dicht door geleiders is omgeven.

De verklaring is de volgende. Bij het inschakelen van de stroom in de draad ontstaat om deze heen een magnetisch veld. Dit veld wil ook in de binnenruimte van de ringspoel met de aslengte l ontstaan. Daar deze kortgesloten en weerstandsloos is, worden daarin kortsluitstromen opgewekt, die de inwerkende magnetomotorische kracht $\oint H_l \, dl$ van de ingeschakelde stroom I opheffen, hetgeen slechts kan, door er evenveel ampèrewindingen tegenover te stellen. Dit principe past men

in de practijk bij de zogenaamde stroomtransformator toe, om de wisselstroom in de draad te meten, zonder deze te onderbreken of met hem in aanraking te komen, hetgeen bij hoogspanningsgeleidingen van voordeel is. Men legt een ringspoel om de geleider heen en sluit deze met een wisselstroomampèremeter kort. De gemeten wisselstroom maal het aantal windingen is ongeveer gelijk aan de wisselstroom in de draad. Een zekere correctie moet worden toegepast, omdat de ringspoel en de ampèremeter niet zonder weerstand zijn.

Tot het tweede gedeelte van de eerste wet van Maxwell, het magnetisch veld van de verplaatsingsstroom, kunnen wij aan de hand van fig. 60 komen. Door een rechte draad vloeit een gelijkstroom I. Voor de componenten van de magnetische veldsterkte H langs een gesloten weg l om de draad geldt volgens (89): $\oint H_l\, dl = I$. Wij snijden uit de draad een cilindrisch stuk met de doorsnede A en de hoogte d; eenvoudigheidshalve nemen wij aan, dat de draad zeer dik en het verwijderde stuk zeer kort is, zodat de onderbreking een vlakke luchtcondensator met een practisch homogeen electrisch veld vormt. Wij dwingen nu de stroom I tot doorlopen door de spanning aan de aansluitpunten van de draad in een geschikt tempo eenparig op te voeren. Hierdoor verkrijgen wij een eenparig toenemende lading Q op de genoemde condensator. Immers, de stroom I transporteert in iedere secunde I coulomb negatieve lading naar het ene einde van de onderbrekingsplaats en haalt deze van het andere einde weg, waardoor dit per secunde eveneens I coulomb positieve lading krijgt. Volgens de beschouwingen van blz. 179 kunnen we deze toenemende lading Q evengoed beschrijven als een even grote, op gelijke wijze toenemende electrische flux Ψ, die van het positieve einde van de plaats van onderbreking naar het negatieve einde gaat.

De ontdekking van Maxwell was nu, dat het in dit geval voor het magnetische veld om de draad heen hetzelfde is of het wordt opgewekt door de geleidingsstroom I (... A) of door de

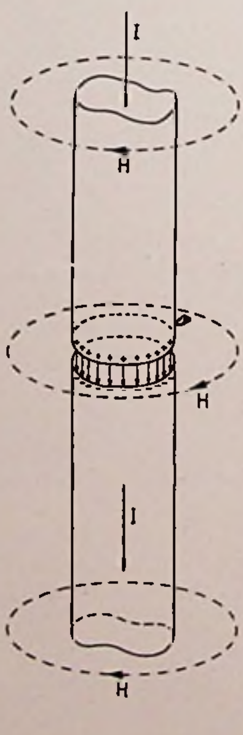


Fig. 60. Draad, waarin een constante gelijkstroom I vloeit, met een onderbreking. Het magnetische veld om de draad verandert niet door deze onderbreking. De stroom kan in stand worden gehouden door de spanning aan de aansluitingen van de draad eenparig te verhogen. Daardoor ontstaat eenparig een toenemende lading op de door de onderbreking gevormde platte condensator, zodat een eenparig toenemend electrisch veld op de plaats van de onderbreking wordt opgewekt. De gehele doorsnede van de einden van de draad bij de onderbreking wordt gelijkmatig met lading bedekt; in de figuur is slechts de lading aan de voorzijde met de bijbehorende krachtlijnen aangeduid.

er door ontstane veranderende electrische flux $d\Psi/dt = I$ ... (C/sec = = A). Het tweede gedeelte van de eerste wet van Maxwell wordt daarom aldus geformuleerd:

$$\oint H_l\, dl = d\Psi/dt. \qquad (90)$$

In ons voorbeeld werd het magnetisch veld om de draad opgewekt door de geleidingsstroom en om de plaats van onderbreking door het er mee overeenkomende veranderende electrische veld. Nu kan een magnetisch veld ook ontstaan door de samenwerking van beide oorzaken onafhankelijk van elkaar. Door de samenvatting van beide oorzaken verkrijgen we als volledige *eerste wet van Maxwell*

$$\oint H_l\, dl = I + d\Psi/dt \qquad (91)$$

[H ... (A/m); l ... (m); I ... (A); Ψ ... (C); t ... (sec)].

Dit geval treedt bv. op bij het laden van een condensator met een slecht isolerend diëlectricum, waar behalve de veranderende electrische flux in het diëlectricum nog een geleidingsstroom optreedt gelijk aan de op dat moment tussen de platen staande spanning maal de geleiding van het diëlectricum.

Een keten, waarin een stroom loopt en waarin een condensator is opgenomen, gedraagt zich, wat het magnetische veld aangaat, alsof een verplaatsing van electriciteit ook in een volledig isolerend diëlectricum zou optreden (hetgeen voor materiële diëlectrica met een hoge ε_r in zekere zin waar is). Daarom wordt het veranderende electrische veld ook wel „verplaatsingsstroom" genoemd. Bij deze wijze van spreken kan men zeggen, dat er alleen gesloten stromen bestaan. Bij onderbrekingen wordt de geleidingsstroom tot verplaatsingsstroom; grootte en richting blijven dezelfde.

8. Mechanische krachten in electrische en magnetische velden

Een electrisch geladen lichaam ondervindt een kracht in een electrisch veld; een geleider, waar een stroom door vloeit, ondervindt een kracht in een magnetisch veld.

De eenheid, waarmee we krachten meten, is de newton (zie hfdst. VI). Het is de kracht, die aan de eenheid van massa (1 kg) de eenheid van versnelling (1 m/sec^2) geeft. De arbeid of energie, die een constante kracht levert, is deze kracht vermenigvuldigd met de afgelegde weg, dus de eenheid van energie is 1 newtonmeter (1 Nm), die ook 1 joule wordt genoemd (1 J). De energie, die een electrische energiebron levert, is het product van spanning, stroom en tijd. De eenheden voor spanning (1 volt) en de stroom (1 ampère) zijn zo gekozen, dat

$$1\ \text{Nm} = 1\ \text{VAsec} = 1\ \text{Wsec} = 1\ \text{J} \qquad (92)$$

(1 newtonmeter = 1 voltampèresecunde = 1 wattsecunde = 1 joule).

Hiermee is het verband tussen de electrische en de mechanische grootheden aangegeven.

a. Krachten in het electrische veld

Een puntvormige lading Q ondervindt in een electrisch veld van de sterkte E een kracht

$$K = Q\,E \quad \ldots \quad (93)$$

$$[K \ldots (\mathrm{N});\; Q \ldots (\mathrm{C});\; E \ldots (\mathrm{V/m})].$$

Bij het berekenen van deze kracht dient voor E te worden ingevuld de veldsterkte, die ter plaatse heerste voordat Q aanwezig was; hierbij is aangenomen, dat door het aanbrengen van Q de ladingen, die E veroorzaken, niet van plaats veranderen. De richting van deze kracht is zodanig, dat een positieve lading wordt getrokken in de richting van de veldsterkte, dat wil zeggen in het veld van een geladen condensator in de richting van de positieve naar de negatieve plaat, een negatieve lading in de tegengestelde richting. De verg. (93) is dus een vectorvergelijking; K en E zijn vectoren (bezitten dus grootte en richting).

Bij een vacuumcondensator, gevormd door twee evenwijdige platen, waarvan de ene plaat een lading $+Q$ en de andere een lading $-Q$ bezit, trekken de beide platen elkaar aan. Men kan de grootte van deze kracht als volgt vinden. We denken de platen beweegbaar, zodat ze elkaar kunnen naderen onder invloed van deze kracht. We hebben gevonden, dat de energie van een geladen condensator is

$$W = {}^1/_2 Q^2/C. \quad \ldots \quad (56)$$

We zorgen, dat de lading Q bij een beweging van de platen van de condensator niet verandert door de condensator van de spanningsbron af te schakelen. Voor de capaciteit hebben we gevonden

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{l}, \quad \ldots \quad (48)$$

dus is $W = {}^1/_2\, Q^2\, l/\varepsilon_0\, A$. Wanneer bij constant gehouden lading de afstand l kleiner wordt, neemt de electrische energie W evenredig met l af. Deze vermindering van electrische energie wordt daarbij als mechanische arbeid geleverd. Noemen we de kracht, die op de platen werkt, K, dan is dus

$$K = {}^1/_2\, Q^2/\varepsilon_0\, A. \quad \ldots \quad (94)$$

Verder is $Q = D\,A$ en $D = \varepsilon_0\,E$, dus is

$$Q = \varepsilon_0\,E\,A. \quad \ldots \quad (95)$$

Uit (94) en (95) volgt nu voor de aantrekkende kracht tussen de condensatorplaten

$$K = {}^1/_2 Q\,E \quad \ldots \quad (96)$$

$$[K \ldots (N);\; A \ldots (\mathrm{C});\; E \ldots (\mathrm{V/m})].$$

b. De wet van Coulomb

Twee tegengestelde puntladingen Q_1 en Q_2 op een afstand r trekken elkaar in vacuum aan met een kracht

$$K = Q_1 Q_2 / 4 \pi r^2 \varepsilon_0 \qquad (97)$$

[K ... (N); Q ... (C); r ... (m); ε_0 zie blz. 181].

Dit is de *wet van Coulomb*. Deze kunnen we als volgt afleiden.

De lading Q_1 veroorzaakt op de afstand r een electrische veldsterkte E, die op de lading Q_2 een kracht uitoefent volgens (93). Van Q_1 gaat een electrische flux $\Psi_1 = Q_1$ uit. Deze is bolsymmetrisch in de ruimte verdeeld. De electrische inductie D (flux per m^2) op een afstand r van Q_1 is dus Ψ_1 gedeeld door het oppervlak van de bol met de straal r, dus $Q_1/4 \pi r^2$. In vacuum is de veldsterkte $E = D/\varepsilon_0$, dus in ons geval is $E = Q_1/4 \pi r^2 \varepsilon_0$, waaruit in verband met (93) de wet van Coulomb (97) volgt.

c. Invloed van het diëlectricum op de krachten

Is het diëlectricum een vloeistof of gas, zodat de gehele ruimte tussen de geleiders, waar het electrische veld aanwezig is, met deze vloeistof of dit gas met de diëlectrische constante ε is gevuld, dan moet in de formules, waar de factor ε_0 in voorkomt, deze worden vervangen door ε; formules zonder ε_0 kunnen zonder meer worden gebruikt.

Bij vaste diëlectrica daarentegen moet men er rekening mee houden, dat zich tussen de geleider en het diëlectricum een zeer dunne laag vacuum of lucht bevindt, althans dat deze ontstaat bij het uit elkaar bewegen van de platen, wat bij de vloeistof of het gas niet het geval is. Als voorbeeld diene het volgende. Een vlakke condensator wordt volledig in een isolerende vloeistof met de diëlectrische constante $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ gedompeld. Hoe verandert de kracht op de platen? Volgens (96) is $K = {}^1/_2 Q E$. Houden we hierbij de lading Q constant, dan blijft $D = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$ constant, dus wordt E in het diëlectricum het ε_r-de gedeelte van de oorspronkelijke waarde, zodat de kracht K ook het ε_r-de gedeelte wordt. De hierbij verdwijnende electrische energie treedt als mechanische arbeid op, doordat de isolerende vloeistof in het veld van de condensator wordt getrokken. Houden we echter de spanning tussen de platen, dus ook E, constant, dan wordt de kracht K ε_r maal zo groot omdat de lading Q ε_r maal zo groot wordt. Schuiven we echter een vast diëlectricum met dezelfde ε_r tussen de platen, dan blijft bij constant gehouden lading de kracht op het ogenblik, dat de platen van het vaste diëlectricum worden afgetrokken, dezelfde als in vacuum, omdat E wel in het diëlectricum, maar niet in de spleet tussen diëlectricum en plaat ε_r maal zo klein wordt. Houden we echter de spanning constant, dan blijft in het diëlectricum E dezelfde, doch wordt de lading Q en daarmee tevens E in de spleet ε_r maal zo groot, zodat de kracht K ε_r^2 maal zo groot wordt. Bij een vast diëlectricum

is dus ten gevolge van de luchtspleet de maximale kracht K in beide gevallen ε_r maal zo groot als bij een vloeibaar diëlectricum met dezelfde diëlectrische constante.

d. Krachten in het magnetisch veld

Een magnetisch veld oefent geen kracht uit op een zich in rust bevindende electrische lading. Beweegt de electrische lading zich echter in een magnetisch veld, dan wordt op de drager van deze lading wel een kracht uitgeoefend. Een electrische stroom hebben we leren

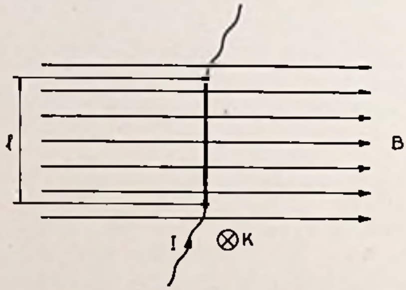


Fig. 61. Een rechte geleider met de lengte l, die deel uitmaakt van een gesloten keten, waar een gelijkstroom I door vloeit, ondervindt in een homogeen magnetisch veld, waarvan de inductie B loodrecht op de stroomvoerende geleider is gericht, een kracht K, loodrecht op de geleider en op de richting van B. Bij de aangegeven richtingen is deze kracht naar achteren gericht, hetgeen is aangegeven door de achterkant van een geveerde pijl. $K = I\,l\,B$.

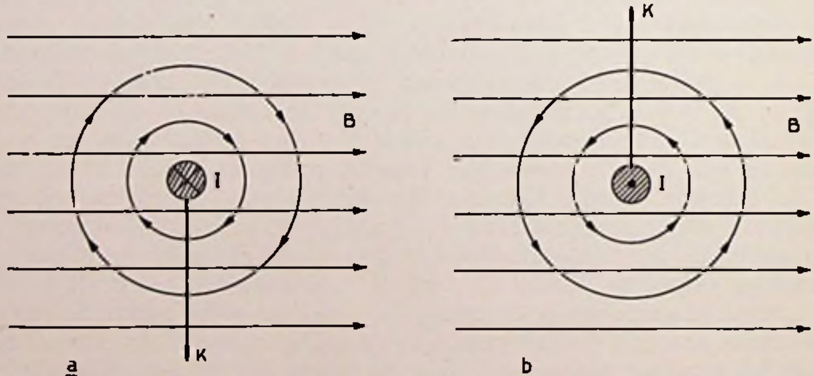


Fig. 62. De kracht K, die werkt op een stroomvoerende geleider in een magnetisch veld, is gericht naar het zwakste resulterende magnetisch veld, dat ontstaat uit de oorspronkelijke en de door de stroom I opgewekte inductie B. De eerste is aangeduid door rechte, de laatste door cirkelvormige krachtlijnen. a. de doorsnede van een geleider, waarin de stroom I van ons af is gericht, wordt aangegeven door de achterzijde van een pijl; b. de stroom naar ons toe gericht, dan wordt dit aangegeven door de punt van een pijl.

kennen als een zich bewegende lading. De kracht, die wordt uitgeoefend op een rechte draadvormige geleider met de lengte l, waar een stroom I door vloeit, en die zich bevindt in een homogeen magnetisch veld met de magnetische inductie B, terwijl de richting van de draad loodrecht is op de richting van B (fig. 61), ondervindt een kracht

$$K = I\,l\,B \qquad (98)$$

$[K \ldots (\mathrm{N});\; I \ldots (\mathrm{A});\; l \ldots (\mathrm{m});\; B \ldots (\mathrm{Wb/m^2})]$.

De richting van deze kracht is loodrecht op de richting van de stroom I en op de richting van de magnetische inductie B. De richtingszin kan het gemakkelijkst worden aangegeven als volgt. De stroom door de draad wekt een magnetisch veld op, waarbij de inductie B cirkelvormig om de draad verloopt, met een zodanige richting, dat de omloopszin van B en de richting van de stroom I aan elkaar zijn toegevoegd als de draairichting en de voortgaande richting van een rechtse schroef (zie blz. 192). Het aanwezige uitwendige magnetische veld wordt daardoor aan de ene zijde van de draad versterkt, aan de andere zijde verzwakt (fig. 62). De draad tracht zich te bewegen in de richting van het zwakste veld. Bij het berekenen van deze kracht dient voor B te worden ingevuld de inductie, die ter plaatse heerste voordat I aanwezig was; hierbij is aangenomen, dat door het aanbrengen van I de stromen of de magneten, die B veroorzaken, niet in sterkte veranderen. Is de richting van het magnetische veld niet loodrecht op de richting van de draad, dan moet in (98) B worden vervangen door de component B_n van B loodrecht op de draad (fig. 63).

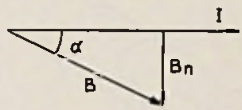


Fig. 63. Is de hoek tussen de richting van de stroom en de richting van het uitwendige magnetische veld α, dan is de kracht, die de stroomgeleider ondervindt, $K = I\,l\,B_n = I\,l\,B \sin\alpha$ en gericht loodrecht op I en op B, naar de zijde van het zwakste resulterende veld.

Twee evenwijdige draden met de lengte l, op een afstand r, waardoor de stromen I_1 en I_2 vloeien, oefenen op elkaar een kracht uit

$$K = \mu_0 I_1 I_2\, l / 2\pi r \qquad (99)$$

$[K \ldots (\mathrm{N});\; \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m};\; I \ldots (\mathrm{A});\; l \text{ en } r \ldots (\mathrm{m})]$.

Zijn de richtingen der beide stromen dezelfde, dan trekken de draden elkaar aan; zijn de richtingen der stromen tegengesteld, dan stoten de draden elkaar af.

Dit kan op overeenkomstige wijze worden afgeleid als de kracht, die twee electrische ladingen op elkaar uitoefenen. Volgens (87) veroorzaakt de stroom I_1 op de afstand r loodrecht op I_1 een magnetische veldsterkte $H = I_1/2\pi r$. Daar $B = \mu_0 H$, is ter plaatse van I_2: $B = \mu_0 I_1/2\pi r$.

Door dit te substitueren in (98) wordt (99) verkregen.

De kracht op een zich met de snelheid v loodrecht op de richting van het magnetische veld bewegende lading Q is

$$K = Q\,v\,B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (100)$$

$[K \ldots (\mathrm{N});\ Q \ldots (\mathrm{C});\ v \ldots (\mathrm{m/s});\ B \ldots (\mathrm{Wb/m^2})]$.

Deze kracht wordt de *Lorentz-kracht* genoemd. Ook wordt deze naam wel gebruikt voor de in (98) aangegeven kracht. De vergelijkingen (98) en (100) komen met elkaar overeen; (94) kan worden beschouwd als een bijzonder geval van (100). Een stroom I in een stuk geleider met de lengte l komt overeen met de totale lading in dit stuk geleider met de snelheid v, als $Q\,v = I\,l$ naar grootte en richting. De richting van de kracht in (100) is dan ook dezelfde als in (98), mits de bewegingsrichting van een positieve lading Q in (100) dezelfde is als de richting van de stroom I in (98).

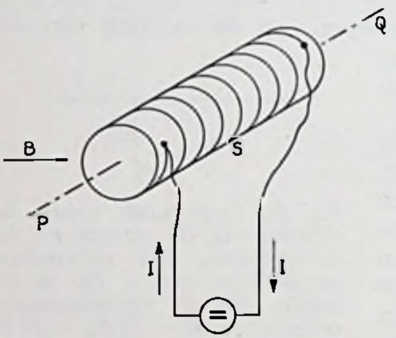


Fig. 64. Een spoel, waar een stroom door vloeit, ondervindt in een magnetisch veld een koppel. S. spoel van n windingen met het windingsoppervlak A, waar een stroom I door vloeit; PQ. as van de spoel loodrecht op de richting van een uitwendig magnetisch veld met de inductie B. De spoel ondervindt een koppel $M = B\,n\,I\,A$.

Een spoel, die zich bevindt in een homogeen magnetisch veld, en waarvan de as loodrecht staat op dit veld, zodat de richting van het veld evenwijdig aan het windingsoppervlak is (fig. 64), ondervindt een koppel. Is het aantal windingen van de spoel n, het windingsoppervlak A, de stroom door de spoel I en de magnetische inductie van het veld B, dan is dit koppel

$$M = B\,n\,I\,A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (101)$$

$[M \ldots (\mathrm{Nm});\ B \ldots (\mathrm{Wb/m^2});\ I \ldots (\mathrm{A});\ A \ldots (\mathrm{m^2})]$.

Dit volgt uit (98). Onderstellen we bv. een rechthoekig windingsoppervlak (fig. 65) met de verticale lengte l en de horizontale breedte b, geplaatst in een horizontaal magnetisch veld met de inductie B, dan is de kracht op ieder der verticale geleiders volgens (98) $K = I\,l\,B$, dus op de n geleiders $B\,n\,I\,l$. Daar de richtingen der stromen in de beide verticale zijden tegengesteld zijn, zijn de krachten op beide ook tegengesteld gericht, zodat er een koppel werkt, waarvan de arm b is, zodat de grootte van het koppel $B\,n\,I\,l\,b = B\,n\,I\,A$ is. De beide horizontale zijden van de rechthoek zijn evenwijdig aan de richting van het magnetisch veld, zodat hierop geen kracht wordt uitgeoefend. Kan de spoel draaien om een verticale as (fig. 65), dan draait zij in de aangegeven richting. De krachten op de verticale geleiders blijven

even groot en behouden dezelfde richting. De arm van het koppel wordt echter $b \cos \alpha$, als α de hoek is, waarover de spoel is gedraaid; het koppel wordt dus $B\,n\,I\,A \cos \alpha$ en wordt nul als $\alpha = 90°$ is geworden. De krachten, die op de horizontale geleiders werken als $\alpha \neq 0$ zijn boven en onder gelijk, doch tegengesteld gericht en hebben dus geen invloed op het koppel. De spoel plaatst zich dus zo, dat zijn windingsoppervlak loodrecht staat op het uitwendige magnetisch veld.

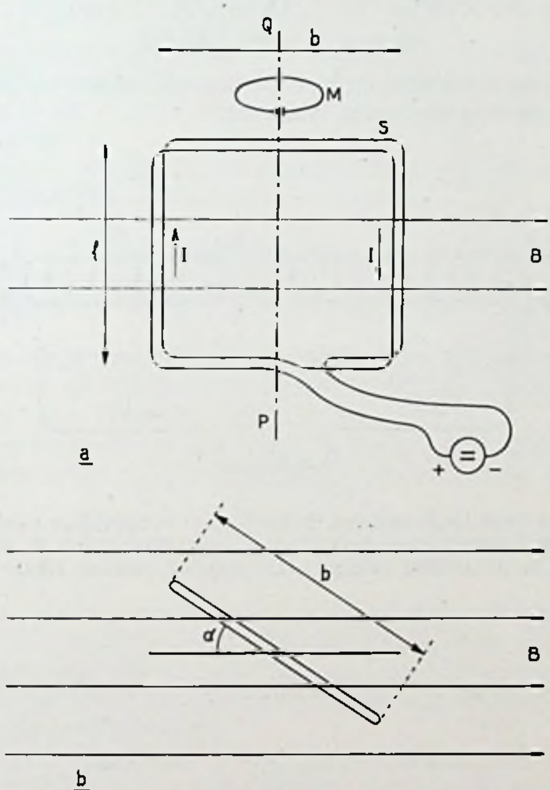


Fig. 65. a. Als fig. 64, doch met een spoel met rechthoekig windingsoppervlak. De ronde pijl M geeft de richting van het koppel aan bij de aangegeven richtingen van de stroom I en van de inductie B. b. bovenaanzicht, als de spoel over een hoek α is gedraaid. Bij groter wordende hoek α wordt het koppel kleiner; bij $\alpha = 90°$ is $M = 0$.

Het magnetisch veld, dat door de stroom door de spoel wordt opgewekt, heeft dan binnen de spoel dezelfde richting als het uitwendig magnetisch veld. De spoel plaatst zich dus zo, dat zij zo veel mogelijk omvat van het magnetisch veld, dat bij haar stroomrichting „past" (dat wil zeggen volgens een rechtse schroef aan de stroomrichting is toegevoegd).

We beschouwen nu twee langgerekte spoelen, waar dezelfde stroom door vloeit, in elkaars verlengde geplaatst (fig. 66), zodanig, dat de eindvlakken evenwijdig zijn en een homogene flux Φ loodrecht op de eindvlakken van de ene spoel naar de andere gaat. De spoelen kunnen we ook vervangen denken door ijzeren magneten. De kracht, waarmee de polen elkaar aantrekken, is

$$K = {}^1/_2\, \Phi\, H = {}^1/_2\, A\, B\, H = {}^1/_2\, \mu_0\, A\, H^2 = {}^1/_2\, \Phi^2/\mu_0\, A \quad .. \quad (102)$$

$[K \ldots (\mathrm{N});\ \Phi \ldots (\mathrm{Wb});\ H \ldots (\mathrm{A/m});\ A \ldots (\mathrm{m^2});\ B \ldots (\mathrm{Wb/m^2});$
$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}].$

Voor H moeten we hier nemen de waarde tussen de polen, dus in de lucht, of, streng genomen, vacuum.

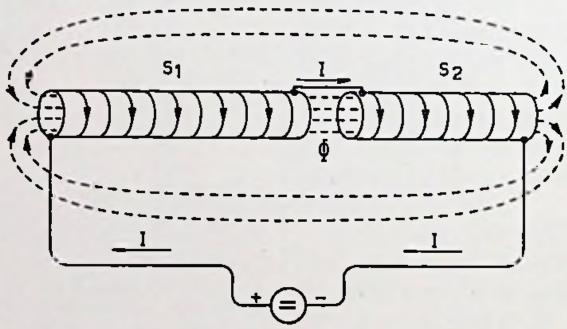


Fig. 66. Tussen twee lange spoelen S_1 en S_2 met evenwijdige eindvlakken, waar dezelfde stroom I door vloeit, ontstaat een magnetische flux Φ, die van de ene spoel in de andere overgaat. De spoelen trekken elkaar aan.

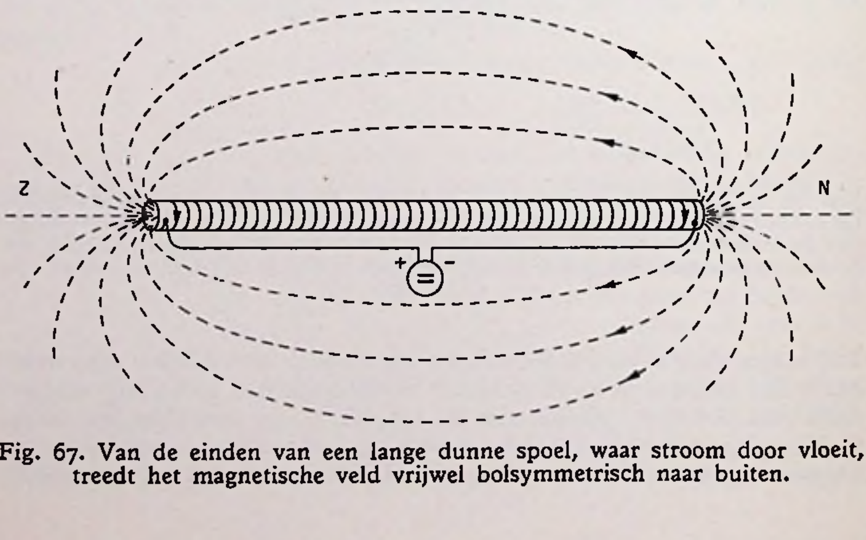


Fig. 67. Van de einden van een lange dunne spoel, waar stroom door vloeit, treedt het magnetische veld vrijwel bolsymmetrisch naar buiten.

Bij langgerekte spoelen en in mindere mate bij lange dunne staafmagneten treedt de flux Φ ongeveer bolsymmetrisch in de buurt van de einden bij de polen uit (fig. 67). Brengt men zulk een einde in een homogeen magnetisch veld met de veldsterkte H, dan wordt op deze magneetpool een kracht uitgeoefend

$$K = \Phi H \qquad (103)$$

$$[K \ldots (\mathrm{N});\ \Phi \ldots (\mathrm{Wb});\ H \ldots (\mathrm{A/m})].$$

(103) is een vectorvergelijking. Een magnetische noordpool wordt in de richting van H getrokken, dus in de ruimte tussen de polen van een magneet in de richting van de zuidpool, een zuidpool in tegengestelde richting.

Twee polen Φ_1 en Φ_2 met bolsymmetrisch veld op een afstand r oefenen op elkaar een kracht uit

$$K = \Phi_1 \Phi_2 / 4\pi r^2 \mu_0 \qquad (104)$$

$$[K \ldots (\mathrm{N});\ \Phi \ldots (\mathrm{Wb});\ r \ldots (\mathrm{m});\ \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{H/m}].$$

Men noemt deze vergelijking de *magnetische wet van Coulomb*. De afleiding hiervan uit (103) komt overeen met de afleiding voor de electrische wet van Coulomb (97) uit (93).

Voor andere magnetica dan vacuum (of lucht) geldt voor μ_r hetgeen bij de krachten in het electrische veld is vermeld voor ε_r.

9. Permanente magneten

We kunnen een permanente magneet opvatten als een bron van magnetische flux, zoals we een accumulator als bron van electrische stroom beschouwen. Bij vergelijking van een stroomcircuit en een magnetisch circuit bemerken we vele punten van overeenkomst, zoals de tabel op pag. 222 aangeeft.

We nemen een geïdealiseerd magnetisch circuit, zoals in fig. 68 is aangegeven, bestaande uit een permanente magneet M met een noordpool N en een zuidpool Z, en twee ijzeren poolschoenen P, waartussen een luchtspleet ter lengte s_l. We onderstellen, dat de poolschoenen geen magnetische weerstand bezitten ($\mu = \infty$) en dat geen strooiing optreedt, zodat de gehele magnetische flux binnen de magneet, de poolschoenen en de luchtspleet blijft. De hartlijn van de magnetische flux is in fig. 68 door een stippellijn aangegeven. De doorsnede van de magneet M loodrecht op de flux Φ noemen we A, de doorsnede van de luchtspleet A_l; de inductie in de magneet B en die in de luchtspleet B_l. Daar de flux in de luchtspleet dezelfde is als die in de magneet, is

$$B_l A_l = B A. \qquad (105)$$

Tabel. Analoge grootheden voor de vergelijking van een magnetisch circuit met een stroomketen

Stroomketen	*Magnetisch circuit*
E.m.k. of spanning $U = \int E_l\, dl$ of $\oint E_l\, dl$ ... (V)	M.m.k. of „magnetische spanning" $= \int H_l\, dl$ of $\oint H_l\, dl$ ... (A)
Electrische veldsterkte E ... (V/m)	Magn. veldsterkte H ... (A/m)
Stroom I ... (A)	Magnetische flux Φ ... (Wb)
Stroomdichtheid S ... (A/m²)	Magnetische inductie B (Wb/m²)
Weerstand $R = U/I = (\int E_l\, dl)/I$ ... (V/A)	Magnetische weerstand (reluctantie) $R_m = (\int H_l\, dl)/\Phi$ ... (A/Wb)
Soortelijke weerstand $= 1/\gamma$ ... (Vm/A)	Soortelijke magnetische weerstand $= 1/\mu$ ... (Am/Wb)
Weerstand van een geleider met homogeen stroomveld $R = l/\gamma A$ ... (V/A)	Magnetische weerstand van een magneticum met homogeen magnetisch veld $R_m = l/\mu A$ ... (A/Wb)
Specifieke wet van Ohm: $E = S/\gamma$ ... (V/m)	Specifieke wet van Ohm voor het magnetische veld: $H = B/\mu$ ... (A/m)
Vermogen $P = I\, U$ ... (AV = W)	Energie $W = {}^1/_2\, \Phi \int H_l\, dl$ ... (WbA = Wsec)
Ruimtelijke vermogensdichtheid $S\, E$ ... (W/m³)	Ruimtelijke energiedichtheid ${}^1/_2\, B\, H$ ... (Wsec/m³)

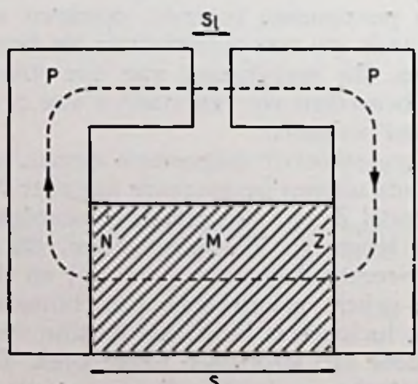


Fig. 68. Magnetisch circuit met luchtspleet. M. magneet met de lengte s; P. poolschoenen; S_l. lengte van de luchtspleet. De doorsnede van de magneet is A, die van de luchtspleet A_l. De pijlen in de stippellijn geven de richting van de flux aan.

Om de lezer in de voor hem misschien onwennige manier om magnetische circuits te behandelen in te leiden, geven wij ook de overeenkomstige wijze aan, die men bij een stroomketen zou kunnen toepassen. Een accumulator met de spanning U met het plaatoppervlak A levert de stroom I door een weerstand met de doorsnede A_l, de lengte s_l en de soortelijke geleiding γ. De stroomdichtheid in de accumulator is S, die in de weerstand S_l. Dan is

$$S_l A_l = S A. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (105a)$$

De magnetische spanning van de luchtspleet is gelijk aan de flux maal de magnetische weerstand:

$$H_l s_l = \Phi_l s_l / \mu_0 A_l = B_l s_l / \mu_0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (106)$$

(Wet van Ohm voor het magnetisme, ook wel *wet van Hopkinson* genoemd.) Analoog: De spanning aan de weerstand is gelijk aan de stroom maal de weerstand:

$$U_l = E_l s_l = I s_l / \gamma A_l = S_l s_l / \gamma. \quad \ldots\ldots \quad (106a)$$

De magnetische spanning van de luchtspleet is gelijk aan de door de magneet geleverde. Als wij een formulering kiezen, die wij overeenkomstig voor de spanning bij de wetten van Kirchhoff hebben toegepast, dan kunnen wij ook zeggen, dat de som van de magnetische spanningen bij een omloop in een magnetisch circuit nul is, dus:

$$H_l s_l + H s = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (107)$$

waarbij H de veldsterkte in de magneet is. Bij de omloop volgens de fluxrichting rekenen wij magnetische spanningen van een noordpool naar een zuidpool positief, van een zuidpool naar een noordpool, dus bij de weg door een magneet, negatief. Analoog: De spanning aan de weerstand is gelijk aan de door de accumulator geleverde, waarbij de som van de spanningen bij een omloop gelijk nul wordt gesteld:

$$E_l s_l + U = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (107a)$$

Hierbij treedt een zeker verschil op, omdat de magnetomotorische kracht door de over de gehele lengte s van de magneet gelijkmatig verdeelde moleculaire kringstroompjes wordt opgewekt, waarbij als het ware het geheel der kringstroompjes van een doorsnede de flux doorgeeft naar de kringstroompjes van de volgende doorsnede. Bij de accumulator daarentegen wordt de gehele spanning U in een laag van moleculaire afmetingen tussen de electrolyt en de ene plaat opgewekt. Om de analogie van de stroomketen met het magnetische circuit ook nog op de m.m.k. $= H s$ te kunnen uitbreiden, stellen wij ons als spanningsbron een reeks van zeer dunne accumulatoren voor, in serie geschakeld, dicht op elkaar gepakt. De spanning van deze bron is dan evenredig met de lengte, met een kleine discontinuïteit, omdat de klemspanning per cel met een bedrag tussen 0 en 2 V springt; wij zien bij deze spanningsbron af van het practische bezwaar, dat men

accumulatoren niet mag kortsluiten als men deze niet wil beschadigen. Wij noemen de e.m.k. van deze bron $E\,s$, als $E = U/s$. Dan is:

$$E_l s_l + E\,s = 0. \qquad \text{(107b)}$$

Uit (105) en (107) volgt

$$B_l H_l A_l s_l = B_l^2 A_l s_l / \mu_0 = -B\,H\,A\,s. \qquad \text{(108)}$$

Analoog: Uit (105a) en (107b) volgt:

$$S_l E_l A_l s_l = S_l^2 A_l s_l / \gamma = -\,S\,E\,A\,s. \qquad \text{(108a)}$$

Bij practisch gebruik van een magnetisch circuit, dat gelijkenis vertoont met fig. 68, interesseren we ons voor de magnetische inductie B_l, die we verkrijgen in een luchtspleet van een bepaald volume, terwijl we het volume van de magneet M klein wensen. Uit (108) volgt, dat voor een gegeven volume $A_l s_l$ van de luchtspleet en een vereiste inductie B_l in de luchtspleet het volume $A\,s$ van de magneet des te kleiner kan zijn naarmate het product $B\,H$ voor de magneet groter is.

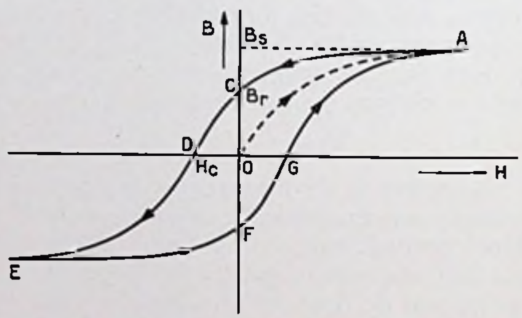


Fig. 69. Magnetiseringskromme of hysteresiskromme van een ferromagnetisch materiaal; de inductie B van een magneetstaal als functie van de magnetiserende veldsterkte H. De kromme wordt volgens de pijlen doorlopen. B_s. verzadiging; B_r. remanentie; H_c. coërcitiefkracht.

De voor een bepaalde soort magneetstaal geldende bij elkaar behorende waarden van B en H worden gegeven door de magnetiseringskromme (fig. 69). Het hoogste bereikbare blijvende magnetisme van een magneetstaal wordt verkregen als men het eerst door een uitwendig veld tot de verzadiging magnetiseert (de gestippelde kromme OA van fig. 69, die de maagdelijke kromme wordt genoemd). Blijft men bij het magnetiseren onder de verzadiging, dan is ook het blijvende magnetisme na het wegnemen van het magnetiserende veld kleiner dan in het eerste geval. Daarom geeft men ter karakterisering van een magneetstaal de magnetiseringskromme, die van de verzadiging uitgaat. Door het magnetiseren worden de elementaire magneetjes of kringstromen (de gebieden van Weiss, zie blz. 200) gericht. Laat men ver-

volgens de sterkte van het uitwendige veld afnemen, dus H weer nul worden, dan blijven de elementaire magneetjes gedeeltelijk gericht en wordt het gedeelte AC doorlopen. Laat men vervolgens het uitwendige veld in tegengestelde richting toenemen, dan wordt het gedeelte CD doorlopen. In het punt D zijn de elementaire magneetjes geheel willekeurig gericht, zodat de resulterende inductie B naar buiten nul is geworden. Bij verdere toeneming van H in dezelfde richting worden ze weer gericht, doch in tegengestelde richting als eerst; hierbij wordt het gedeelte DE van de kromme doorlopen. Bij E treedt weer verzadiging op. Neemt nu H weer af tot nul en vervolgens in de andere richting weer toe, dan wordt het gedeelte EFGA doorlopen. De inductie B blijft dus in zekere zin achter bij het uitwendige veld H. Dit verschijnsel wordt *hysteresis* genoemd. De magnetiseringskromme van fig. 69 wordt daarom ook *hysteresislus* genoemd. Men noemt de inductie OC, die overblijft, als H eerst zo groot is gemaakt, dat verzadiging optreedt (het punt A), en vervolgens nul is geworden, de *remanentie* B_r. De veldsterkte OD, nodig om dit remanent magnetisme weer te doen verdwijnen, heet de *coërcitiefkracht* H_c. Deze kromme geeft in principe de waarde van B, die aan een gesloten ring van het desbetreffende materiaal kan worden gemeten, als H wordt opgewekt door een gelijkstroom I, die door een gelijkmatig over de gehele lengte verdeelde, dichte wikkeling van n windingen vloeit (fig. 70). Als de lengte van de hartlijn van de ring l is, dan zijn de in fig. 69 aangegeven waarden van H verkregen uit $H = n\,I/l$. Voor de meting van de verandering van de flux Φ door de ring is onmiddellijk op de ring een meetwikkeling van n_1 windingen aangebracht, verbonden met een ballistische voltmeter, die dus spanningsstoten $\int U\,dt$ meet. Brengen wij bv. in een bepaald geval door het inschakelen van de stroom de flux van nul op de waarde Φ, zo kunnen wij deze afleiden uit de gemeten spanningsstoot, door deze door n_1 te delen; de bijbehorende B-waarde is dan $\Phi/A = (\int U\,dt)/n_1 A$.

Voor de meting voeren wij H tot H_{max} op, waarbij B_s wordt bereikt. Als wij uitschakelen, meten wij de spanningsstoot overeenkomende met $B_s - B_r$. Commuteren wij en schakelen wij dan $-H_{max}$ in, dan meten wij $B_s + B_r$; hieruit zijn B_s en B_r te berekenen. Voor de bepaling van waarden van B tussen B_s en B_r voeren wij de veldsterkte eerst op tot H_{max} en schakelen deze vervolgens terug op de bedoelde waarde H. De daarbij optredende spanningsstoot komt overeen met $B_s - B$. Voor waarden van B tussen B_r en $-B_s$ eerst H_{max} instellen, dan $H = 0$ maken zonder de hierbij optredende spanningsstoot te meten, daarna $-H$ inschakelen. De dan optredende spanningsstoot levert $B_r - B$.

Door de gemagnetiseerde ring loopt bij uitgeschakelde wikkelingsstroom een flux overeenkomende met B_r, terwijl van geen punt van de ring naar een ander punt magnetische krachtlijnen door de buitenruimte lopen; naar buiten toe is de ring niet magnetisch. Dit lijkt

vreemd, doch wordt begrijpelijk, als wij aan een gesloten ring uit een groot aantal dunne, dicht op elkaar gepakte in serie geschakelde accumulatoren denken, zoals bij (107b). Door deze gehele ring loopt dan de kortsluitstroom, die ook door een enkele cel loopt, als wij deze kortsluiten; daarom is de klemspanning van iedere cel uit de ring nul en er staat geen spanning tussen de verschillende cellen van de ring, omdat de open spanning van iedere cel direct ter plaatse wordt gebruikt om de kortsluitstroom door de inwendige weerstand van die cel te drijven.

Om ook een electrische analogie voor het ontstaan van de waarden van B tussen B_r en B_s te geven, moeten wij in de stroombronnenring een gelijkmatig verdeelde spanning introduceren, waardoor de aanwezige kortsluitstroom nog sterker wordt; dit kunnen wij bereiken, doordat wij door de ring een ijzerkern steken, waarin een magnetische flux in de geschikte richting eenparig toeneemt; als analogon voor de waarden tussen B_r en nul zou men deze flux in de omgekeerde richting in de ijzerkern eenparig laten toenemen; de op deze wijze inductief

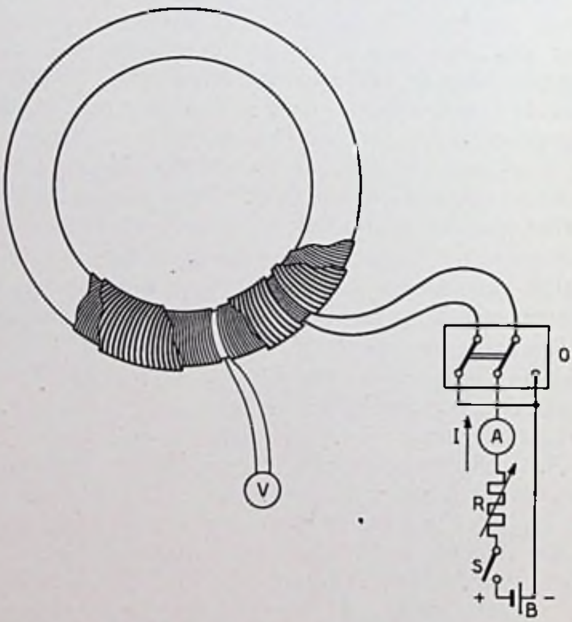


Fig. 70. Meting van de hysteresiskromme van een gesloten ring uit magnetisch materiaal. Op de ring is een dichte wikkeling aangebracht, waardoor de magnetiserende gelijkstroom I vloeit. De stroomsterkte kan door middel van de regelweerstand R worden ingesteld; met behulp van de omschakelaar O kan de richting van de stroom in de spoel worden omgekeerd. Onder de magnetiserende wikkeling is direct op de ring een wikkeling aangebracht, die met een ballistische voltmeter V is verbonden. Hiermede kunnen fluxveranderingen in de ring worden gemeten. B. gelijkstroombron; S. schakelaar; A. ampèremeter.

in de ring opgewekte spanning zou dan de spanning van de bronnen tegenwerken en de stroom zwakker doen worden. De analogie van deze stroombronnenring met een veranderlijke flux er door als opwekker van een extra $\oint E_s\, ds$ met de gemagnetiseerde ring wordt nog beter, als wij bij deze laatste $\oint H_s\, ds$ laten opwekken, doordat wij door deze ring een enkele dikke stroomvoerende geleider steken in plaats van de wikkeling op de ring.

De magnetiseringskromme volgens fig. 69 verschaft ons de samenhang tussen de inductie van het magneetstaal in afhankelijkheid van de magnetiserende veldsterkte, die van buiten bv. door middel van een gelijkstroomwikkeling op het magneetstaal inwerkt. Wat ons echter interesseert, is de inductie, die een oorspronkelijk van buiten af tot de verzadiging gemagnetiseerde permanente magneet in een bepaalde luchtspleet opwekt. In de vergelijkingen (105) en (107) is al aangegeven hoe wij in dit geval kunnen rekenen, als de veldsterkte H in de magneet bekend is; wij moeten dus nu nog aangeven, hoe de in (107) bedoelde veldsterkte H in de magneet met luchtspleet samenhangt met de door de stroomwikkeling opgewekte veldsterkte H bij de hysteresiskromme van fig. 69 voor een gesloten ring van hetzelfde materiaal, als wij aan de hysteresiskromme iets willen hebben voor het ons interesserende probleem.

Als wij een gemagnetiseerde gesloten ring met de inductie B_r op één plaats doorsnijden en vervolgens openbuigen, zodat er een luchtspleet ontstaat, dan wordt de flux door magneet en luchtspleet en daarmee de B in de magneet kleiner. Dit komt gedeeltelijk, doordat de magnetische weerstand van het circuit met de magnetische weerstand van de luchtspleet wordt vergroot en gedeeltelijk, doordat moleculaire magneetjes bij verkleining van de B minder goed gericht blijven. Wij zien bij dit gedachtenexperiment af van een eventuele invloed van de mechanische buigspanningen op de richting van de moleculaire magneetjes. Dezelfde verkleining van B kunnen wij echter volgens de hysteresiskromme ook bereiken, door een negatieve H, dat wil zeggen een negatieve magnetomotorische kracht $H s$ (s = lengte van de hartlijn van de ring) op de gemagnetiseerde ring in te laten werken; hiertoe dienen wij een gelijkstroom $I = H s/n$ door de n windingen op de ring te sturen in een richting, tegengesteld aan die, waarmee deze oorspronkelijk werd gemagnetiseerd.

Toen in het eerste geval de met de magneetinductie $B < B_r$ overeenkomende flux door de luchtspleet ging, ontstond er een m.m.k. in de luchtspleet. Deze m.m.k. kunnen wij bij homogene veldverdeling in de luchtspleet als $B_l s_l/\mu_0$ berekenen, waarbij B_l is gegeven door (105). Bij inhomogene veldverdeling in de luchtspleet kunnen wij de luchtspleet-m.m.k. op een of andere manier meten. Nu blijkt, dat deze m.m.k. gelijk is aan de negatieve m.m.k., die wij in het tweede geval bij de gesloten ring als tegen-ampèrewindingen moesten aanbrengen om de inductie in de magneet van B_r tot B te verlagen. Daarom kunnen wij als de veldsterkte H van de magneet in form. (107) de H uit de

hysteresiskromme nemen, die bij de in de magneet heersende inductie B tussen B_r en nul op de tak CD behoort. Deze H is negatief, hetgeen goed bij de tekenkeuze van (107) en (108) past.

Deze gedachtengang behoeft ons geenszins moeilijk toe te schijnen; immers bij een stroomketen passen wij dezelfde gedachtengang zonder moeite toe. Een accumulator wordt kortgesloten, de stroomdichtheid in de accu is S_r, de klemspanning is nul, de stroom gaat buiten de accu van plus naar min, in de accu van min naar plus. Wij schakelen een weerstand tussen de klemmen, de stroomdichtheid in de accu wordt $S < S_r$, over de weerstand ontstaat een spanning U_l. Dezelfde stroomdichtheid S in de accumulator kunnen wij ook verkrijgen, als wij een spanningsbron met de klemspanning U_l tegen de spanning van de accumulator in schakelen. Voor de accumulator hier en de magneet boven is het hetzelfde, of de stroom- resp. fluxvermindering door een gewone resp. magnetische weerstand of door een electrische tegenspanning resp. tegen-m.m.k. tot stand wordt gebracht.

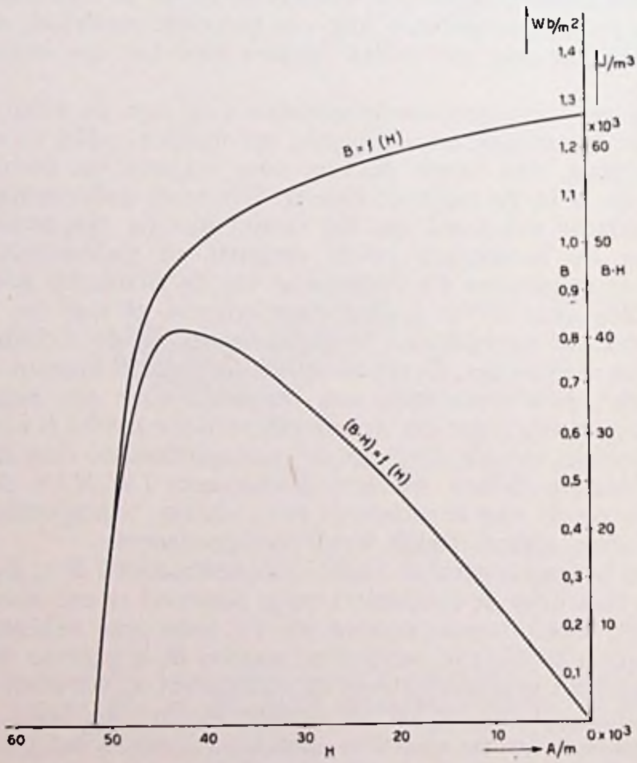


Fig. 71. $B = f(H)$ en $B \cdot H = f(H)$ voor het magneetstaal Ticonal G. Dit staal wordt het rationeelst gebruikt bij H = ca 43 000 A/m, waarbij $(B \cdot H)_{max}$ = = ca 41 000 J/m³.

Enkele problemen, die zich bij het gebruik van permanente magneten in de practijk voordoen, zullen wij nu beschouwen. Daarbij onderstellen we eenvoudigheidshalve, dat er geen strooiing optreedt en dat de velden homogeen zijn.

a. De kleinste magneet voor gegeven B in een gegeven luchtspleet

We kunnen voor een luchtspleet met gegeven afmetingen en vereiste inductie B de kleinste magneet als volgt vinden. We bepalen voor de verschillende ter beschikking staande staalsoorten het product $B\,H$ als functie van H uit het gedeelte der magnetiseringskromme tussen $H = 0$ en $H = -H_c$. Het maximum van $B\,H = f(H)$ (fig. 71) geeft het gunstigste werkpunt voor ieder staal. We nemen het staal met het grootste maximum van het product $B\,H$ en verkrijgen zo de gunstigste waarden voor H en B. We moeten nu de afmetingen van de magneet (A en s) zo kiezen, dat de veldsterkte H en de inductie B in de magneet zich werkelijk op deze waarden instellen. Dit kan worden verkregen met behulp van de formules (105) en (107).

b. Het werkpunt, waarop de magneet zich instelt

Een door s_l en A_l gegeven luchtspleet wordt, overeenkomstig fig. 68, achtereenvolgens verbonden met magneten van dezelfde afmetingen, maar die zijn vervaardigd van staalsoorten met verschillende magnetiseringskrommen. De vraag is nu, op welk werkpunt de magneet zich instelt, met andere woorden welke B en welke H optreden.

Hier wordt dus een constante uitwendige magnetische weerstand (de luchtspleet) aan verschillende spanningsbronnen (de magneten) gelegd. Uit (105) volgt: $B_l = B\,A/A_l$; uit (107) volgt: $H_l = -H\,s/s_l$. Daar $B_l/H_l = \mu_0$, is dus in de magneet

$$B/H = -\mu_0\,s\,A_l/s_l\,A. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (109)$$

Dit is een rechte lijn in het diagram (fig. 72), met tg $\alpha = -B/H$, die de verschillende magnetiseringskrommen in het werkpunt snijdt. Uit de B van dit werkpunt kan dan de bijbehorende B_l in de luchtspleet worden berekend met behulp van (105). Hierbij kan een „slechtere" soort staal, dat wil zeggen kleinere waarde van $(B\,H)_{max}$, zoals 1 in fig. 72, vergeleken met 2, toch een hogere B en B_l geven. Dit is een gevolg van de omstandigheid, dat de aanpassing van de uitwendige weerstand aan staal 1 beter is dan die aan staal 2.

De hier gegeven afleiding voor de gunstigste afmetingen van de magneet komt hierop neer, dat de uitwendige magnetische weerstand $H_l\,s_l/B_l\,A_l \ldots$ (A/Wb) gelijk wordt gemaakt aan de inwendige magnetische weerstand ($H\,s/B\,A$) bij het werkpunt van de generator (de magneet), waar deze de grootste energie [$^1/_2\,B\,A\,H\,s \ldots$ (Wsec)] kan afgeven. Van deze gunstigste aanpassing is men in het voorbeeld van fig. 72 bij staal 2 veel verder verwijderd dan bij staal 1.

c. Het verwijderen en weer aanbrengen van de poolschoenen

Worden bij een magneet de poolschoenen verwijderd en vervolgens weer aangebracht, dan keert de oorspronkelijke toestand niet terug. Bij het wegnemen van de belasting (de poolschoenen met luchtspleet) vermindert de flux en daarmee de inductie B. $B = 0$ en dus ook $H = H_c$ op de magnetiseringskromme worden niet geheel bereikt, omdat de uitwendige magnetische weerstand niet oneindig wordt, daar de flux zich buiten de magneet van de noordpool tot de zuidpool kan sluiten. We bereiken bv. het punt b van de magnetiseringskromme 2 van fig. 72.

Bij het weer aanbrengen van de magnetische weerstand (de poolschoenen met luchtspleet) wordt de oude waarde van B bij het punt a niet meer bereikt, doch slechts de lagere waarde c op de weerstandslijn. De magneet is dus blijvend verzwakt. De weg van b naar c volgt niet uit de gewone magnetiseringskromme; deze zou afzonderlijk, van b uitgaande, moeten worden bepaald. Worden de poolschoenen nu nogmaals verwijderd en weer aangebracht, dan verzwakt de magneet niet verder, zolang het punt b niet wordt gepasseerd. Zijn magnetisering bij verschillende uitwendige magnetische weerstanden wordt dan steeds beschreven door de kromme bc.

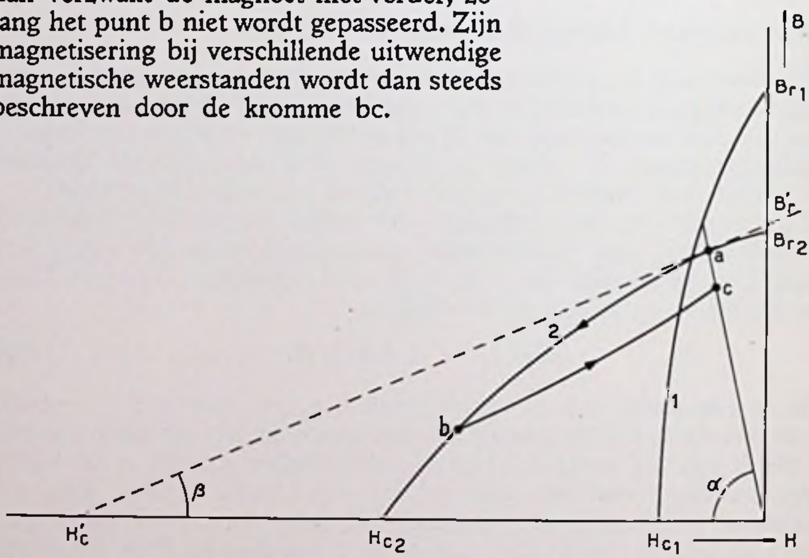


Fig. 72. Gedeelte van de magnetiseringskromme $B = f(H)$ tussen de remanentie B_r en de coërcitiefkracht H_c voor twee verschillende staalsoorten 1 en 2. Een bepaalde uitwendige magnetische weerstand is vertegenwoordigd door het ene been van de hoek α. Het snijpunt hiervan met de krommen levert het werkpunt. Wegens de slechte aanpassing van deze magnetische weerstand aan het staal 2 ligt dit werkpunt voor dit staal ongunstig; voor het staal 1 is de aanpassing beter en ligt het werkpunt gunstiger, hoewel staal 2 beter is dan staal 1 [$(B\,H)_{max\,2} > (B\,H)_{max\,1}$]. bc geeft de magnetiseringskromme voor staal 2, na wegnemen en weer aanbrengen van de uitwendige weerstand. β bepaalt de theoretische inwendige magnetische weerstand, B_r' en H_c' de theoretische waarden voor het werkpunt a van staal 2.

d. Analogie tussen een magneet en een electrische spanningsbron

Men kan een gelijkspanningsbron voorstellen door de open spanning U_0 in serie met de inwendige weerstand R_i, of door de kortsluitstroom I_k met dezelfde inwendige weerstand R_i parallel aan haar klemmen. Voor een verbruiksapparaat met de weerstand R wordt de klemspanning U en de stroom I, waarbij

$$U = U_0 - R_i I, \qquad (110)$$

$$I = U_0/(R_i + R). \qquad (111)$$

Hieruit kan het gedrag bij verandering van de belasting (verandering van R) worden berekend. In de buurt van kortsluiting ($R << R_i$) geeft parallel schakelen van twee gelijke spanningsbronnen, waarbij de resulterende inwendige weerstand R_{ip} de helft wordt, ongeveer de dubbele stroom. In de buurt van nullast ($R >> R_i$) geeft echter het in serie schakelen van twee gelijke spanningsbronnen, waarbij de open spanning $U_{0\,s} = 2\,U_0$ wordt, ongeveer de dubbele stroom, bij eenzelfde belastingsweerstand R. Het grootste vermogen wordt geleverd als $R = R_i$.

Bij een permanente magneet, gegeven door zijn magnetiseringskromme en zijn afmetingen, gebeurt iets dergelijks. Alleen zijn de overeenkomstige magnetische grootheden bij een permanente magneet niet constant, dus slechts geldig voor één werkpunt van de magnetiseringskromme, en, bij benadering, voor de omgeving er van, dus voor kleine belastingvariaties. Ook moet men er op letten, dat de magnetiseringskromme van de verzadiging uit wordt doorlopen.

Door H te vermenigvuldigen met de lengte s van de magneet verkrijgt men de magnetische spanning $H\,s$. Door B met zijn doorsnede A te vermenigvuldigen verkrijgt men de magnetische stroom, de flux $\Phi = B\,A$. De magnetiseringskromme geeft de afhankelijkheid van de magnetische klemspanning van de flux. Uit H_c volgt de open spanning, uit B_r de kortsluitflux. Ligt nu ons werkpunt in de buurt van H_c, dan geeft, bij gelijke uitwendige magnetische weerstand, verdubbeling van de *lengte* s van de magneet ongeveer de dubbele flux. Ligt ons werkpunt in de buurt van B_r, dan levert verdubbeling van de *doorsnede* A practisch de dubbele flux op. Voor tussengelegen werkpunten trekken we de raaklijn aan de magnetiseringskromme (bv. voor punt a in fig. 72), die voor de omgeving van het raakpunt een benadering vormt voor de kromme. Deze geeft op de assen H_c' en B_r', waaruit de voor dit punt geldende open spanning $H_c'\,s$ en de kortsluitflux $B_r'\,A$ volgen. De uitwendige magnetische weerstand is s cotg α/A, de inwendige is s cotg β/A. Hiermee kan men dus in de buurt van het werkpunt de formules (110) en (111), na vertaling, voor de magnetische grootheden gebruiken.

Overeenkomstig het electrische geval wordt de maximale energie opgewekt als $R_i = R$, dus bij het werkpunt, waarvoor $\alpha = \beta$. Dit punt is hetzelfde als we uit $(H\,B)_{max}$ vroeger hebben gevonden.

Bij deze beschouwingen hebben we ondersteld, dat er geen strooiing is. In practische gevallen is er echter steeds in meer of mindere mate strooiing aanwezig, waardoor soms aanzienlijke afwijkingen van de hier gegeven geïdealiseerde uitkomsten en conclusies worden verkregen.

10. ε_0, μ_0 en de lichtsnelheid

Bij de bespreking van de wetten van Maxwell hebben we er op gewezen, dat door het samenwerken van veranderende electrische en magnetische velden een voortplanting van deze velden in de ruimte plaats kan hebben, waarbij we van electromagnetische golven kunnen spreken. De wiskundig geoefende kan met behulp van de wetten van Maxwell de electromagnetische veranderingen ergens in de ruimte berekenen, als ergens anders electromagnetische veranderingen optreden. Om een voorbeeld te noemen: het is mogelijk te berekenen, hoe groot de electrische en de magnetische veldsterkte op een bepaalde plaats in de ruimte op ieder ogenblik zijn, als op een zekere afstand een wisselstroom van bepaalde sterkte en aantal wisselingen per secunde (frequentie) in een zendantenne van bepaalde afmetingen wordt gestuurd. Dergelijke berekeningen zijn echter vrij lastig. Om aan de lezer toch een voorbeeld van de voortplanting van een electromagnetische verstoring te geven, die zonder veel wiskundige kennis berekend kan worden, bespreken we het inschakelen van een gelijkspanning op een oneindig lange leiding. Wij onderstellen hierbij eenvoudigheidshalve een leiding, die bestaat uit twee evenwijdige vlakke metalen banden ter breedte b en op de onderlinge afstand d in vacuum; de weerstand van het geleidermateriaal zij verwaarloosbaar klein (fig. 73).

Als we aan het begin tussen de twee geleiders een gelijkspanning U aanleggen, dan nemen de geleiders niet terstond over de gehele lengte deze spanning ten opzichte van elkaar aan. Door het samenwerken van de capaciteit en de zelfinductie van de leiding plant de spanningstoestand zich met een eindige snelheid v langs de leiding voort. Als

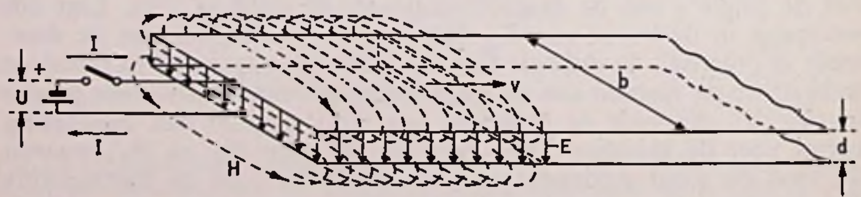


Fig. 73. Voortplanting van het electromagnetische veld bij het inschakelen van een gelijkspanning U op een oneindig lange leiding. Er vloeit een constante laadstroom I. Tussen de geleiders, die eenvoudigheidshalve als twee vlakke geleiders met de grote breedte b en de kleine onderlinge afstand d in vacuum zijn aangenomen, ontstaat een electrisch veld met de veldsterkte $E = U/d$ en een magnetisch veld met de veldsterkte $H = I/b$. Het scheidingsfront tussen de veldruimte en de veldvrije ruimte tussen de geleiders plant zich met de snelheid v voort.

de capaciteit per lengte-eenheid tussen de geleiders C' ... (F/m) is, dan is voor iedere meter van de leiding, die op de spanning U ... (V) gebracht wordt, een lading $U\,C'$ ... (C/m) nodig. Als dus de spannings- en ladingstoestand, met andere woorden het electrische veld tussen de geleiders, zich met de snelheid v ... (m/sec) langs de leiding voortplant, dan moet de spanningsbron per secunde de lading $U\,C'\,v$ ... (C/sec) leveren. Dit betekent, dat in de leiding van het begin tot aan het punt, dat juist nog wordt geladen, de stroom $I = U\,C'\,v$ ... (A) moet vloeien. Is nu de zelfinductie van de door de twee geleiders gevormde lus per lengte-eenheid L' ... (H/m), dan gaat door het vlak tussen de geleiders voor iedere door deze stroom doorlopen meter lengte de magnetische flux $I\,L'$ ... (Wb/m). Voor iedere volgende meter, die door de stroom wordt doorlopen — en dat is per secunde v meter — moet deze flux opnieuw worden gevormd, waardoor een inductieve tegenspanning $I\,L'\,v$ ontstaat. De stroom I wordt nu zo sterk, dat deze tegenspanning gelijk wordt aan de aangelegde spanning: $I\,L'\,v = U$ ... (V). Hieruit volgt:

$$v^2 = 1/L'\,C' \ldots (\mathrm{m/sec})^2. \qquad (112)$$

Bij deze afleiding zij nog het volgende opgemerkt. Bij een capaciteit denkt men gewoonlijk aan de stroom ten gevolge van een verandering van de spanning: $I = C\,dU/dt$. Bij een zelfinductie denkt men gewoonlijk aan de spanning ten gevolge van een verandering van de stroom: $U = L\,dI/dt$. Hier hebben we daarentegen te maken met een stroom ten gevolge van capaciteitsverandering bij constante spanning: $I = U\,dC/dt$, en met een spanning ten gevolge van een zelfinductieverandering bij constante stroom: $U = I\,dL/dt$.

Onderstellen we eenvoudigheidshalve b groot ten opzichte van d, dan worden de electrische en de magnetische flux tussen de geleiders practisch homogeen en wij kunnen C' en L' en daarmede v gemakkelijk uit de afmetingen van de leiding berekenen [verg. (48) en (71)]. Iedere meter van de leiding vormt een vlakke condensator met de capaciteit $C' = \varepsilon_0\,b/d$ en een lange éénwindingsspoel met de windingsoppervlakte $1 \times d$ en de lengte b, dus met de zelfinductie $L' = \mu_0\,d/b$. Streng genomen ontbreken bij deze éénwindingsspoel twee zijden met de hoogte d en de lengte b. De magnetische flux sluit zich hier in de buitenruimte alleen om elk van de twee geleiders en bij de echte spoel ook om de twee hier ontbrekende zijden. De grootte van deze flux blijft echter dezelfde, omdat bij de lange spoel de magnetische weerstand in de buitenruimte toch practisch nul is, onafhankelijk van het zich sluiten van de flux om twee of vier zijden van de spoel.

Substitueren we deze waarden voor L' en C' en daarna de waarden voor ε_0 en μ_0 [verg. (45) en (68)] in de hierboven gevonden formule voor v, dan blijkt de voortplantingssnelheid van het electromagnetische veld tussen de geleiders gelijk te zijn aan de lichtsnelheid:

$$v^2 = 1/\varepsilon_0\,\mu_0 = c^2 \ldots (\mathrm{m/sec})^2. \qquad (113)$$

De wiskundig geoefende kan de samenhang tussen de voortplantingssnelheid van electromagnetische velden en ε_0 en μ_0 ook algemeen uit de vergelijkingen van Maxwell afleiden. Nu is, zoals bekend, de geluidssnelheid in vaste lichamen gegeven door

$$v^2 = E/\varrho \ldots (\mathrm{m/sec})^2$$

[E elasticiteitsmodulus ... (N/m^2); ϱ dichtheid ... (kg/m^3)].

Deze wet kan men eveneens het gemakkelijkst aan oneindig lange staven afleiden; in een grove analogie kunnen wij zeggen, dat $1/\varepsilon_0$ en μ_0 voor het vacuum of de „aether" (het in analogie tot mechanische trillingen ondersteIde medium, waar electromagnetische golven zich in voortplanten) zijn, wat de elasticiteitsmodulus en de dichtheid voor de materie zijn, met name de natuurconstanten, die de voortplantingssnelheid van verstoringen of golven in deze media bepalen. Een meer gedetailleerde doorvoering van deze analogie in de zin, dat aan de aether een bepaalde mechanische elasticiteit en dichtheid toegeschreven zou kunnen worden, gelukt echter niet.

11. De electromagnetische eenheden

De ampère en de volt zijn door het „Comité international des Poids et Mesures" in Parijs met ingang van Januari 1948 als volgt vastgelegd.

„De ampère is de sterkte van een gelijkstroom, die, vloeiende in twee evenwijdige oneindig lange rechtlijnige geleiders van verwaarloosbare cirkelvormige doorsnede, geplaatst in vacuum op een onderlinge afstand van 1 m, tussen deze geleiders per strekkende meter een kracht van 2×10^{-7} newton doet ontstaan.

De volt is het electrisch potentiaalverschil, dat optreedt tussen twee punten van een geleidende draad, die door een gelijkstroom van 1 ampère wordt doorlopen, als het tussen deze punten verbruikte vermogen gelijk is aan 1 watt."

Hierbij is 1 watt het vermogen, dat een energie van 1 joule per secunde kan voortbrengen.

In zijn toelichtingen zegt het voornoemde comité, dat „deze definities als enig doel hebben de waarden van de eenheden vast te leggen en niet de methoden voor hun practische verwezenlijking ... Bijvoorbeeld stelt de definitie van de ampère slechts een bijzonder geval voor van een algemene formule voor de krachten tussen stroomgeleiders, zo gekozen, dat zij gemakkelijk onder woorden kan worden gebracht. Zij dient om de constante in de algemene formule, die dienst moet doen bij het realiseren van de eenheid, vast te leggen."

De formule voor de kracht tussen twee parallelle stroomgeleiders in vacuum, die door de gelijkstromen I_1 en I_2 worden doorlopen, waarbij de onderlinge afstand r klein is ten opzichte van de lengte l, luidt:

$$K = \mu_0 I_1 I_2 l / 2\pi r.$$

Substitueren we hierin $I_1 = I_2 = 1$ A en l en $r = 1$ m, verder voor K de in de definitie van de ampère aangegeven waarde van 2×10^{-7} N, dan zien we, dat het voornoemde comité feitelijk voor de inductieconstante μ_0 de waarde $4\pi \times 10^{-7}$ H/m heeft vastgelegd.

Dientengevolge kunnen wij de definitie van de volt en de ampère het eenvoudigst als volgt formuleren: Het *product* van volt en ampère is vastgelegd door de afspraak, dat de electrische energie-eenheid, de wattsecunde, gelijk zal zijn aan de mechanische energie-eenheid: 1 VAsec = 1 Nm. Het *quotiënt* van V en A is vastgelegd door de afspraak, dat de inductieconstante μ_0 de waarde $4\pi \times 10^{-7}$ Vs/Am zal hebben. Wegens (113): $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, waarbij $c \approx 3 \times 10^8$ m/sec, is dan ook ε_0 bekend.

Met deze gegevens kunnen we alle berekeningen met getalwaarden en eenheden er bij uitvoeren, als we de benodigde metingen met geijkte volt-, ampère-, ohmmeters enz. kunnen verrichten. De absolute ijking van dergelijke instrumenten aan de hand van de gegeven definities onder toepassing van bekende wetten uit de electriciteitsleer is de taak van bepaalde staatslaboratoria, zoals het Amerikaanse „Bureau of Standards" in Washington. Dergelijke instituten bevinden zich ook in Duitsland, Engeland, Frankrijk, Japan en Rusland. Op de er bij toegepaste methoden zullen we hier niet dieper ingaan, omdat deze slechts de specialisten in de genoemde instituten interesseren; we willen slechts de mogelijkheid van een absolute ijking van ampèremeters met behulp van een stroombalans noemen (fig. 74). Tussen een paar vaststaande spoelen van bekende afmetingen en windingstal zweeft in het midden een derde eveneens bekende spoel, bevestigd aan de ene arm van een precisie-balans; aan de andere arm bevindt zich een schaal voor het plaatsen van gewichten. Dezelfde gelijkstroom vloeit door deze drie spoelen in serie en wel zo, dat beide vaste spoelen elkaar in de krachtwerking op de derde ondersteunen. Uit de afmetingen van de spoelen kan men berekenen, welke kracht tussen de spoelen optreedt ten gevolge van een bepaalde gelijkstroom. Verder moet men over nauwkeurig geijkte gewichten beschikken en verder de aantrekkingskracht van de aarde, dat wil zeggen de versnelling van de vrije val g, ter plaatse nauwkeurig kennen.

De enigszins onbegrijpelijke waarde $4\pi \times 10^{-7}$ voor μ_0, waar men toch eenvoudigheidshalve de waarde 1 zou verwachten, is historisch ontstaan, omdat de volt en de ampère oorspronkelijk zijn afgeleid uit het electromagnetische c.g.s. (cm-gram-secunde)-stelsel, waarin de eenheden wel met de factoren 1 met elkaar waren verbonden. Bij dit stelsel werden in de mechanica gebruikt de cm in plaats van de m; de g in plaats van de kg; de dyne = 1 gm/sec² in plaats van de newton = 1 kgm/sec², waarbij dus 1 dyne = 1×10^{-5} N; de erg = = 1 dynecm in plaats van de joule, waarbij dus 1 erg = 1×10^{-7} J. Voor de electromagnetische eenheden ging men uit van de magnetische wet van Coulomb voor puntvormige magneetpolen P in de eenvoudige vorm $K = P_1 P_2/r^2 \ldots$ (dyne); r in cm. Een eenheidspool is dan de

pool, die een gelijke andere op een afstand van 1 cm in vacuum geplaatste pool afstoot met een kracht van één dyne. Deze eenheidspool is identiek met een pool, waarvan de flux van $4\pi/10^8$ Wb uitgaat. Op 1 cm afstand van een eenheidspool heeft de veldsterkte H, gedefinieerd als kracht per eenheid van poolsterkte, uiteraard de waarde 1 (eenheid: oersted); een veldsterkte van 1 oersted is identiek met een veldsterkte van $10^3/4\pi$ A/m. In vacuum stelde men de inductie B (eenheid: gauss) gelijk aan de veldsterkte of, wat op hetzelfde neerkomt, gelijk aan de flux, die gaat door 1 cm^2 oppervlak van een bol met 1 cm straal met een eenheidspool als centrum. 1 gauss is 10^{-4} Wb/m^2. De van een eenheidspool bolsymmetrisch uitgaande flux $\Phi = \int_A B_n \, dA$ is dan 4π maxwell; een flux van 1 maxwell is identiek met een flux van 10^{-8} Wb.

De electromagnetische c.g.s.-eenheid van stroomsterkte heeft de stroom, die in het middelpunt van een cirkel van 1 cm straal een veldsterkte van 1 oersted opwekt, als hij over 1 cm van de omtrek loopt. De electromagnetische c.g.s.-eenheid van spanning ontstaat in een winding, als de door deze omvatte flux eenparig met 1 maxwell per secunde afneemt.

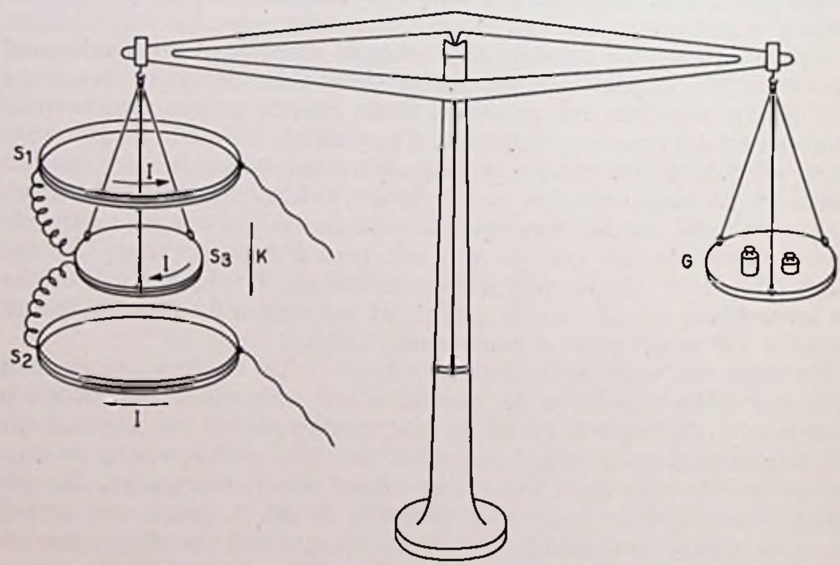


Fig. 74. Stroombalans. Midden tussen twee vaststaande spoelen S_1 en S_2 bevindt zich een zwevende spoel S_3, die aan de ene arm van een balans hangt. Een gelijkstroom I wordt zo door de drie spoelen geleid, dat er een naar beneden gerichte kracht K op S_3 wordt uitgeoefend. Met behulp van de gewichten G kan deze kracht worden gemeten.

Toentertijd werkte men veel met galvanische elementen; men vond de magnetische c.g.s.-eenheid van stroomsterkte wat te groot in vergelijking met de kortsluitstroomsterkte, en de magnetische c.g.s.-eenheid van spanning veel te klein in vergelijking met de open spanning van deze elementen. Daar ook de erg een veel te kleine energie-eenheid was, terwijl de joule een meer geschikte grootte heeft, besloot men als practische eenheid van stroom (1 A) een tiende van de magnetische c.g.s.-eenheid te nemen en als practische eenheid van spanning (1 V) = het 10^8-voudige van de magnetische c.g.s.-eenheid, waarbij 1 VAsec = = 1 J op voor de hand liggende wijze bij de in Parijs bewaarde standaarden van 1 kg en 1 m aansloot. Toentertijd was men zich van de betekenis van de inductieconstante μ_0 niet bewust; het is dus begrijpelijk, dat men op de waarde van deze constante bij de keuze van de V en de A niet heeft gelet.

Het „Comité international des Poids et Mesures" heeft nu de bovengenoemde op zich zelf staande definities van de zogenaamde „absolute" volt en ampère gegeven, opdat men niet meer de gehele afleiding van de verouderde electromagnetische c.g.s.-eenheden behoeft te kennen om de V en de A te kunnen definiëren. We bevelen echter aan, niet deze definities van het Comité, maar slechts de door ons gegeven formulering te onthouden, omdat men de waarde van μ_0 voortdurend nodig heeft, terwijl men het gegeven van het Comité slechts zelden gebruikt. Tegen deze aanbeveling zal het voornoemde Comité, gezien haar toelichting, geen bezwaar hebben.

Vóór Januari 1948 werden tientallen jaren de zogenaamde „internationale" volt, ampère en ohm gebruikt. De ampère was gedefinieerd met behulp van een zilvervoltameter, de ohm met behulp van een kwikdraad met een bepaalde lengte en doorsnede; de volt volgde hieruit. Voor de omrekening kunnen de volgende factoren dienen:

1 internationale volt = 1,004 34 absolute volt;
1 internationale ohm = 1,000 49 absolute ohm.

In de theoretische physica werden nog het electrostatische c.g.s.-stelsel en het stelsel van Gauss gebruikt. Beiden benutten de bovenvermelde mechanische eenheden, die ook in het magnetische stelsel worden gebruikt.

In het electrostatische stelsel ging men voor de electrische eenheden uit van de electrostatische wet van Coulomb voor puntvormige ladingen Q in de eenvoudige vorm $K = Q_1 Q_2/r^2$ . . . (dyne); r in cm. Een eenheidslading is dan de lading, die een gelijke andere op een afstand van 1 cm in vacuum afstoot met een kracht van 1 dyne. Deze eenheid van lading is $= {}^1/_{10}\, c$ coulomb (c getalwaarde van de lichtsnelheid in m/sec $= 2{,}997\,90 \times 10^8 \approx 3 \times 10^8$). De eenheid van stroom is een ladingseenheid per secunde. Op 1 cm afstand van de eenheidslading heeft de veldsterkte E, gedefinieerd als kracht per eenheid van lading, uiteraard de waarde 1; deze veldsterkte is identiek met een veldsterkte van $c/10^4$ V/m. In vacuum stelde men de electrische

verplaatsing D gelijk aan de veldsterkte, waardoor de van een eenheidslading bolsymmetrisch uitgaande flux $\Psi = \int_A D_n \, dA$ de waarde 4π krijgt. De statische verplaatsing 1 is identiek met $10^3/4\pi c$ . . . (C/m²). De eenheid van potentiaal heeft een punt als een arbeid van 1 erg nodig is om een ladingseenheid uit het oneindige, waarvoor men de potentiaal nul aanneemt, naar dit punt te brengen. De statische potentiaal 1 is identiek met $c/10^6$ V. In het stelsel van Gauss worden het magnetische en het statische stelsel zo gecombineerd, dat beide wetten van Coulomb de hierboven vermelde eenvoudige vorm hebben. In dit stelsel gebruikt men de oersted, de gauss, de maxwell van het magnetische stelsel, daarentegen de stroom- en de spanningseenheid en de electrische veldeenheden van het statische stelsel. Daar vele electromagnetische formules in deze drie stelsels onderling verschillen en ook van de door ons gebruikte formules van het Giorgi-stelsel afwijken, raden wij aan, om gegevens in andere dan Giorgi-eenheden eerst in deze om te rekenen en dan uitsluitend met Giorgi-formules te rekenen. Voor wie zich interesseert voor uitvoerige tabellen van omrekeningsfactoren en vergelijkende formuletabellen van het Giorgi-stelsel en de oudere stelsels zij verwezen naar het boekje „Korte samenvatting der electriciteitsleer" door P. Cornelius, uitg. Meulenhoff, Amsterdam.

X. MEERFASENSYSTEMEN

1. Inleiding

In de wisselstroomtechniek wordt in vele gevallen een meerfasensysteem gebruikt. Hieronder verstaan we een stelsel van wisselspanningen met dezelfde frequentie en gewoonlijk ook dezelfde amplitude, doch die ten opzichte van elkaar een faseverschil bezitten. Het meest gebruikte meerfasensysteem is het driefasensysteem. (Soms wordt dit een draaistroomsysteem genoemd, doch deze naam verdient geen aanbeveling.) Bijna alle grote electriciteitsnetten bezigen het driefasensysteem; we zullen ons dan ook in hoofdzaak daartoe beperken.

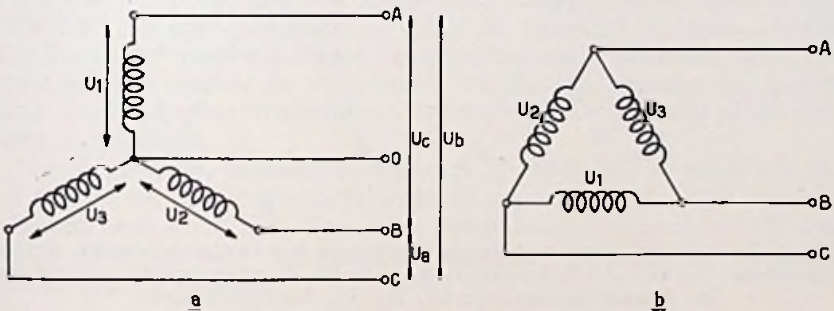


Fig. 1. a. Sterschakeling; b. driehoekschakeling.

We beschouwen een dynamo, die drie wikkelingen bevat, waarin wisselspanningen worden geïnduceerd. De constructie van een dergelijke dynamo wordt beschreven in hfdst. XII. De spanningen kunnen we voorstellen door:

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \hat{U} \sin \omega t\,; \\ U_2 &= \hat{U} \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3}\right); \\ U_3 &= \hat{U} \sin \left(\omega t + \frac{4\pi}{3}\right). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

De drie wikkelingen kunnen in ster of in driehoek worden geschakeld (fig. 1).

Bij de *sterschakeling* noemen we het verbindingspunt het sterpunt of het nulpunt. De machine bezit vier klemmen: O, A, B en C. De spanningen tussen het sterpunt en de klemmen A, B en C zijn gegeven door (1); we noemen deze de *fasespanningen.* De spanningen tussen twee der klemmen A, B en C noemen we de *gekoppelde spanningen* We kunnen deze berekenen uit (1) en vinden

$$\left.\begin{aligned} U_a &= U_2 - U_3 = \hat{U}\sqrt{3}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right); \\ U_b &= U_3 - U_1 = \hat{U}\sqrt{3}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right); \\ U_c &= U_1 - U_2 = \hat{U}\sqrt{3}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}\right). \end{aligned}\right| \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Ook deze spanningen bezitten onderling een faseverschil $\frac{2\pi}{3}$. In fig. 2a zijn deze spanningen door vectoren voorsteld (zie Deel 2, hfdst. II).

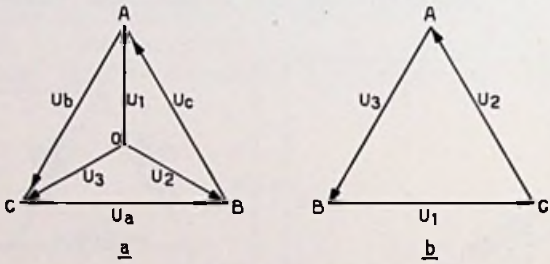


Fig. 2. Vectorvoorstelling van de spanningen in een driefasensysteem. a. sterschakeling; U_1, U_2, U_3: fasenspanningen; U_a, U_b, U_c: gekoppelde spanningen; b. driehoekschakeling; U_1, U_2, U_3, fasenspanningen.

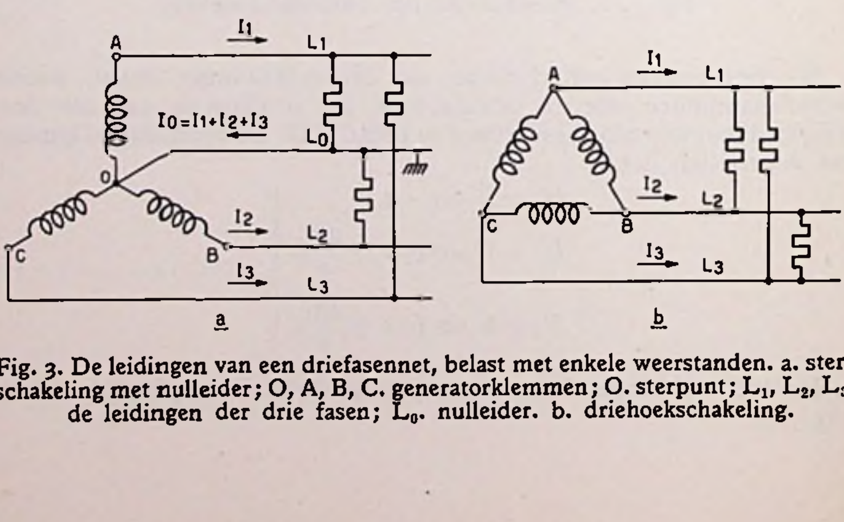


Fig. 3. De leidingen van een driefasennet, belast met enkele weerstanden. a. sterschakeling met nulleider; O, A, B, C. generatorklemmen; O. sterpunt; L_1, L_2, L_3. de leidingen der drie fasen; L_0. nulleider. b. driehoekschakeling.

Bij de driehoekschakeling is er geen sterpunt; de spanningen tussen de klemmen A, B en C zijn dezelfde als de in de wikkelingen van de dynamo opgewekte fasespanningen. Fig. 2b geeft een vectorvoorstelling van de spanningen voor deze schakeling.

Aan de klemmen zijn de leidingen van het electriciteitsnet verbonden (fig. 3). Bij de sterschakeling is een nulleider aanwezig; bij de driehoekschakeling niet. De verbruikers zijn aangesloten tussen de leidingen. Lampen en andere verbruikers, die slechts éénfasespanning behoeven, kunnen worden aangesloten tussen twee der leidingen L_1, L_2, L_3 of, indien een nulleider aanwezig is, tussen een der leidingen L_1, L_2, L_3 en de nulleider L_0. Hierbij moet worden bedacht, dat de gekoppelde spanning (tussen L_1, L_2, L_3 onderling) $\sqrt{3}$ maal zo groot is als de fasespanning (tussen ieder der geleiders L_1, L_2, L_3 en de nulleider L_0). In de meeste gevallen is de nulleider geaard. Bij de meeste laagspanningsnetten in Nederland is de fasespanning 220 V, dus de gekoppelde spanning $220\sqrt{3} \approx 380$ V.

De meeste motoren zijn asynchrone driefasenmotoren (zie hfdst. XII). Deze behoeven een aansluiting aan al de drie fasen; een aansluiting aan de nulleider is niet nodig. Kleine motoren, zoals die voor huishoudelijke apparaten, bv. stofzuigers, zijn éénfase-motoren. Normale woonhuizen worden dan ook aangesloten tussen één der fasen en de nulleider; als geen nulleider aanwezig is, tussen twee fasen. Hierbij wordt er naar gestreefd, voor het gehele net de belasting voor alle fasen gelijk te maken; de woonhuizen worden gelijkmatig over de drie fasen verdeeld. Grootverbruikers worden daarentegen aan al de drie fasen aangesloten.

Het is gewenst, het driefasensysteem symmetrisch te belasten, dat wil zeggen zo, dat de effectieve waarden der stromen in ieder der drie geleiders even groot zijn. Voor een sterschakeling, waarbij de belasting wordt gevormd door weerstanden, die een symmetrische belasting geven, zijn de stromen

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \hat{I} \sin \omega t\,; \\ I_2 &= \hat{I} \sin (\omega t + \frac{2\pi}{3})\,; \\ I_3 &= \hat{I} \sin (\omega t + \frac{4\pi}{3})\,. \end{aligned}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Deze stromen vloeien samen door de nulleider. Deze stroom is

$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3 =$$

$$= \hat{I} \left\{ \sin \omega t + \sin (\omega t + \frac{2\pi}{3}) + \sin (\omega t + \frac{4\pi}{3}) \right\} = 0. \quad .. \quad (4)$$

Bij een symmetrisch driefasensysteem (eveneens bij ieder symmetrisch meerfasensysteem), dat symmetrisch is belast, is de stroom door de

nulleider nul. In de nulleider gaat dus geen vermogen in de vorm van warmte verloren. Dit is een der redenen, waarom men streeft naar een symmetrische belasting der verschillende fasen.

2. Het vermogen van een symmetrisch driefasensysteem

We beschouwen eerst een éénfasesysteem, waarbij een generator een spanning $U = \hat{U} \sin \omega t$ geeft. Indien de generator belast is met een weerstand, is de stroom in fase met de spanning, dus is $I = \hat{I} \sin \omega t$. Bevat de belasting echter ook zelfinductie of capaciteit, dan is de stroom niet in fase met de spanning, en kan worden voorgesteld door $I = \hat{I} \sin (\omega t + \varphi)$, waarbij φ positief of negatief kan zijn (zie Deel 2, hfdst. III). Het vermogen, dat de generator levert, is als functie van de tijd

$$U I = \hat{U} \hat{I} \sin \omega t \sin (\omega t + \varphi) = {}^1/_2 \hat{U} \hat{I} \{\cos \varphi - \cos (2 \omega t + \varphi)\} =$$
$$= U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \{\cos \varphi - \cos (2 \omega t + \varphi)\}. \quad (5)$$

In fig. 4 is dit vermogen als functie van de tijd voorgesteld. We interesseren ons gewoonlijk alleen voor het vermogen, dat gemiddeld gedurende een lange tijd wordt geleverd. Dit is hetzelfde als het gemiddelde vermogen gedurende één periode. De gemiddelde waarde van $\cos (2 \omega t + \varphi)$ over één periode is nul, terwijl $\cos \varphi$ constant is. Het gemiddelde vermogen is dus

$$W = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi. \quad (6)$$

Voor een symmetrisch driefasensysteem in sterschakeling, dat symmetrisch is belast, waarbij de effectieve waarde van de stroom door

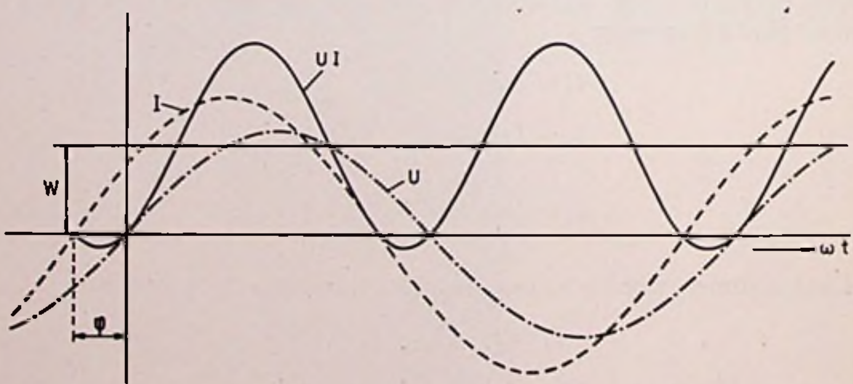


Fig. 4. U. De spanning $\hat{U} \sin \omega t$ van een éénfasenet; I. de stroom $\hat{I} \sin (\omega t + \varphi)$, door de generator geleverd, indien er een faseverschuiving φ optreedt; $U I$. het product van stroom en spanning als functie van de tijd; $W = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi =$ het gemiddelde vermogen.

ieder der leidingen I_{eff} is en de effectieve fasespanning $U_{\text{p eff}}$, levert iedere fase een vermogen $U_{\text{p eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$. Het totaal geleverde vermogen is dus

$$W = 3\, U_{\text{p eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Daar de gekoppelde spanning $U_{\text{k eff}}$ gelijk is aan $\sqrt{3}\, U_{\text{p eff}}$, kunnen we voor (7) ook schrijven

$$W = \sqrt{3}\, U_{\text{k eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Daar bij de hier ondersteld e symmetrische belasting door de nulleider geen stroom vloeit, kunnen we deze verbinding tussen het sterpunt van de belasting en het sterpunt van de generator weglaten. Voor het in de belasting verbruikte vermogen is het nu onverschillig, of de generator in ster of in driehoek is geschakeld, mits de spanning tussen de geleiders L_1, L_2, L_3 dezelfde is. Hoe de schakeling ook moge zijn, het vermogen, dat bij een symmetrische schakeling door de generator wordt geleverd (en dat door de belasting wordt verbruikt), is gegeven door form. (8), mits we onder $U_{\text{k eff}}$ de effectieve waarde van de spanning tussen twee leidingen verstaan.

3. Het draaiveld

Electromotoren, die op een driefasennet worden aangesloten, bestaan uit een stilstaande ijzeren stator en een daarbinnen op een as aangebrachte rotor (zie hfdst. XII). De stator draagt drie gelijke wikkelingen, die geïsoleerd in gleuven zijn geplaatst. In fig. 5 is ieder dezer wikkelingen schematisch door een enkele winding aangegeven. Ruimtelijk zijn deze wikkelingen ten opzichte van elkaar over 120° verschoven.

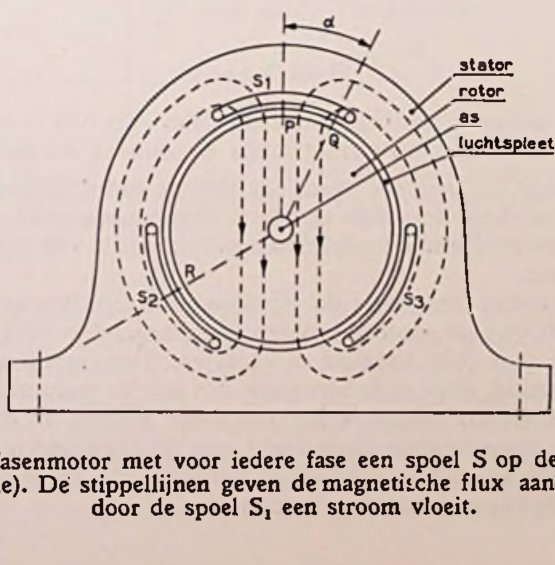


Fig. 5. Driefasenmotor met voor iedere fase een spoel S op de stator (tweepolige machine). De stippellijnen geven de magnetische flux aan als er alleen door de spoel S_1 een stroom vloeit.

De wikkelingen kunnen in ster of in driehoek zijn geschakeld (zie fig. 1). Wordt de statorwikkeling aangesloten aan een driefasennet, dan vloeien door de drie spoelen stromen, die ten opzichte van elkaar $^1/_3$ periode in fase verschillen. De drie stromen kunnen dus worden voorgesteld door (3).

Onderstellen we alleen de stroom I_1 aanwezig, dan geeft deze een magnetische flux $\Phi = \hat{\Phi} \sin \omega t$, in fase met de bijbehorende stroom. In fig. 5 is deze flux door stippellijnen aangegeven. We onderstellen nu, dat de magnetische inductie B sinusvormig langs de omtrek verloopt. In de practijk is dit bij benadering het geval. In het punt P (fig. 5) is de inductie $B_{1\,\mathrm{P}} = \hat{B} \sin \omega t$; in het punt Q is de inductie $B_{1\,\mathrm{Q}} = B_{1\,\mathrm{P}} \cos \alpha = \hat{B} \sin \omega t \cos \alpha$. De stroom I_2 geeft een flux $\Phi_2 = \hat{\Phi} \sin (\omega t + \frac{2\pi}{3})$, dus in het punt R een inductie $B_{2\,\mathrm{R}} = \hat{B} \sin (\omega t + \frac{2\pi}{3})$, dus, wederom aannemende, dat de door de stroom I_2 veroorzaakte inductie sinusvormig langs de omtrek is verdeeld, in het punt Q een inductie $B_{2\,\mathrm{Q}} = \hat{B} \sin (\omega t + \frac{2\pi}{3}) \cos (\alpha + \frac{2\pi}{3})$. Op overeenkomstige wijze geeft de stroom I_3 in het punt Q een inductie $B_{3\,\mathrm{Q}} = \hat{B} \sin (\omega t + \frac{4\pi}{3}) \cos (\alpha + \frac{4\pi}{3})$. De totale inductie in het punt Q is dus

$$
\begin{aligned}
B_{\mathrm{Q}} &= B_{1\,\mathrm{Q}} + B_{2\,\mathrm{Q}} + B_{3\,\mathrm{Q}} = \\
&= B \left\{ \sin \omega t \cos \alpha + \sin (\omega t + \frac{2\pi}{3}) \cos (\alpha + \frac{2\pi}{3}) + \right. \\
&\qquad \left. + \sin (\omega t + \frac{4\pi}{3}) \cos (\alpha + \frac{4\pi}{3}) \right\} = \\
&= {}^3/_2\, \hat{B} \sin (\omega t - \alpha), \qquad \qquad (9)
\end{aligned}
$$

zoals een eenvoudige herleiding geeft. Op ieder ogenblik (t = constant) is de inductie B dus sinusvormig langs de omtrek verdeeld met de maximale waarde $^3/_2\, \hat{B}$. Deze verdeling van de inductie draait met de hoeksnelheid ω. Een dergelijk draaiend magnetisch veld wordt een *draaiveld* genoemd. Bij alle meerfasenmotoren wordt van een draaiveld gebruik gemaakt.

De spoelen, die in fig. 5 over de gehele omtrek zijn verdeeld, kunnen ook op de helft van de omtrek worden aangebracht, terwijl de andere helft eveneens van drie spoelen is voorzien. Dan worden, langs de omtrek rondgaande, twee volledige perioden van de inductie verkregen (fig. 6). De snelheid, waarmee het draaiveld roteert, is dan half zo groot. Om nog kleinere omtrekssnelheid van het draaiveld te verkrijgen wordt de omtrek in meer gelijke delen verdeeld, die ieder op dezelfde wijze van wikkelingen worden voorzien.

Onder een tweefasensysteem verstaat men gewoonlijk een systeem, waarbij de spanningen zijn

$$U_1 = \hat{U} \sin \omega t;$$

$$U_2 = \hat{U} \sin\left(\omega t + \frac{2\pi}{4}\right).$$

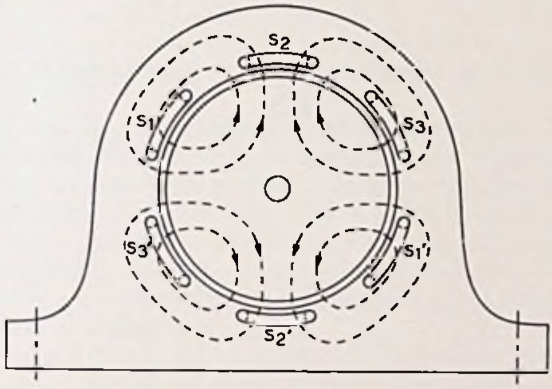


Fig. 6. Plaatsing der spoelen op de stator bij een vierpolige driefasenmotor. De stippellijnen geven de magnetische flux aan voor een bepaald ogenblik. Deze flux draait met de helft van de snelheid van fig. 5.

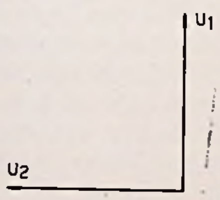


Fig. 7. Vectorvoorstelling van de spanningen in een tweefasensysteem.

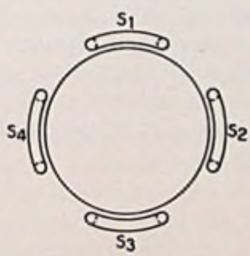


Fig. 8. Plaatsing der spoelen op de stator van een tweefasenmotor. De spoelen S_1 en S_3 worden door dezelfde stroom doorlopen; eveneens de spoelen S_2 en S_4.

In fig. 7 zijn deze spanningen als vectoren voorgesteld. We zouden het eigenlijk de helft van een vierfasensysteem kunnen noemen. Om hiermee een draaiveld te verkrijgen, worden op gelijke afstanden vier wikkelingen S_1, S_2, S_3 en S_4 langs de omtrek aangebracht (fig. 8). De wikkelingen S_1 en S_3 worden aan de ene, de wikkelingen S_2 en S_4 aan de andere fase aangesloten. De aansluitingen worden zo gemaakt, dat de stromen door S_1 en S_3 een flux in dezelfde richting geven, en eveneens de stromen door S_2 en S_4. Op dezelfde wijze als voor een

driefasensysteem is aangegeven kan worden aangetoond, dat ook hier een draaiveld ontstaat.

Een draaiveld kan worden voorgesteld door een draaiende vector, waarvan de lengte de grootte van de maximale waarde van de inductie voorstelt en de richting die van deze maximale inductie is. We hebben tot nu toe symmetrische systemen beschouwd, waarbij de maximale waarde van de inductie constant is en de snelheid, waarmee deze

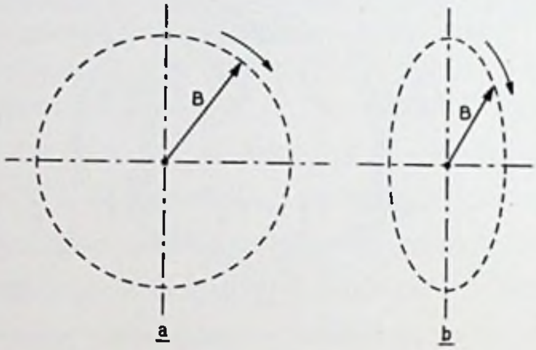


Fig. 9. a. Cirkelvormig draaiveld; b. elliptisch draaiveld.

ronddraait, ook constant is. We spreken dan van een cirkelvormig draaiveld (fig. 9a). Bij onsymmetrische systemen, waarbij de amplituden van de spanningen der verschillende fasen, de faseverschillen tussen de opvolgende fasen of de spoelen voor de verschillende fasen ongelijk zijn, blijft de grootte en de draaisnelheid van de maximale waarde van de inductie niet constant. Dan is het draaiveld gewoonlijk elliptisch (fig. 9b).

XI. DE TRANSFORMATOR

1. Toepassingen van magnetische inductie

In hoofdstuk IX fig. 55 hebben we er al op gewezen, dat men met behulp van magnetische inductie in een spoel een wisselspanning kan opwekken door in een andere spoel, die geen geleidende verbinding met de eerste behoeft te hebben, een wisselstroom een magnetisch wisselveld te laten opwekken. Voorwaarde hiervoor is, dat de wisselflux geheel of gedeeltelijk door de eerste spoel heenloopt. Hierbij is het opmerkelijk, dat wij de wisselspanning aan deze spoel konden verhogen door deze meer windingen te geven.

Van deze mogelijkheid tot transformatie van wisselspanningen met behulp van een dergelijk systeem, transformator genoemd, wordt in de electrotechniek veelvuldig gebruik gemaakt. Om electrische energie over grote afstanden (tien- tot honderdtallen kilometers) zonder grote weerstandsverliezen in betrekkelijk dunne en dus goedkope leidingen te kunnen transporteren, is het zaak om hoge spanningen (bv. 100 000 V) en kleine stromen toe te passen. Dynamo's kunnen echter dergelijke hoge spanningen niet leveren, terwijl ook de verbruikstoestellen (gloeilampen, motoren enz.) voor betrekkelijk lage spanningen (bv. 220 V) zijn gemaakt, zowel om technische redenen, als ook met het oog op het levensgevaar, dat hoge spanningen opleveren. Daarom benut men voornamelijk wisselstroom en schakelt tussen centrale en leiding een transformator, om de spanning omhoog te transformeren en tussen leiding en verbruikersnet een tweede transformator, om de spanning weer op de gewenste waarde omlaag te transformeren.

In de woonhuizen wordt een beltransformator toegepast, om uit het lichtnet van 220 V de voor de electrische bel benodigde spanning van ca 6 V te verkrijgen. In radiotoestellen vindt men in het netgedeelte een transformator met verscheidene wikkelingen, waarbij men aan de gloeistroomwikkeling met 6,3 V de gloeidraden van de radiobuizen en de schaalverlichting kan aansluiten, en aan de hoogspanningswikkeling, met middenaftakking van bv. 2 × 250 V, de gelijkrichter voor de anodespanning. In het laagfrequent gedeelte dient de luidsprekertransformator er toe, om een aanpassing van de luidspreker aan de eindbuis te bewerkstelligen. De eindbuis kan namelijk wel betrekkelijk hoge wisselspanningen (orde van grootte 100 V), echter slechts naar verhouding lage wisselstromen leveren (orde van grootte 10 mA). De luidspreker daarentegen heeft spanningen en stromen in de grootte-orde

van 1 V en 1 A nodig. Verder wordt door de luidsprekertransformator ook de anodegelijkspanning van de eindbuis gescheiden gehouden van de wikkeling van de luidspreker, zodat er geen gelijkstroom door de spreekspoel daarvan loopt.

Bij al deze toepassingen wil men de primaire wikkeling van de transformator, wat de wisselenergie aangaat, zo vast mogelijk met de secundaire wikkeling koppelen; hierbij noemt men in het algemeen de wikkeling, die met de bron is verbonden, primair en de wikkeling, waaraan het verbruiksapparaat is aangesloten, secundair. De door de primaire wikkeling opgewekte magnetische flux moet zo volledig mogelijk door de secundaire wikkeling worden geleid. Daarom worden bij de tot nu toe genoemde toepassingen ijzerkernen gebruikt, waarop de verschillende wikkelingen zijn aangebracht. Wegens het grote geleidingsvermogen van ijzer voor de magnetische flux in vergelijking met lucht gaat dan het overgrote gedeelte van de opgewekte flux door het ijzer, waardoor het beoogde doel wordt bereikt.

Er is echter nog een andere toepassing van het transformatorprincipe, waar men juist met losse koppelingen werkt, dat wil zeggen waarbij slechts een gedeelte van de opgewekte magnetische flux door de secundaire spoel wordt gestuurd. Dit is bv. het geval bij de bandfilters in het middenfrequent gedeelte of bij de inductieve antennekoppeling van radiotoestellen. Hier wil men gebruik maken van resonantieverschijnselen, waardoor spanningen met bepaalde frequenties worden versterkt, andere daarentegen worden onderdrukt. Daarvoor is een losse koppeling tussen primaire en secundaire keten nodig (zie Deel 2, hfdst. III.B.2 en Deel 3, hfdst. IV.F.2). Bij een losse inductieve koppeling is dikwijls geen ijzerkern nodig. Bij deze koppeling kan men dan nog al of niet transformatie, dat wil zeggen een verschillend aantal primaire en secundaire windingen, toepassen.

We willen nu enkele eenvoudige principiële beschouwingen geven, waaruit het gedrag van transformatoren blijkt, als we bij gegeven primaire wisselstroom of -spanning de transformatie of de koppeling veranderen. Wij zullen ons hierbij in hoofdzaak beperken tot het bespreken van de open spanningen en de kortsluitstromen. Hierdoor krijgt men namelijk een vrij goede indruk van het gedrag van een transformator in verbinding met verbruiksapparaten. Een verbruiksapparaat zal bij een bepaalde spanning een zekere stroom verbruiken. Verbinden wij dit dus met een transformator, die aan een wisselstroombron is aangesloten, dan zal aan de klemmen van de transformator in het algemeen een spanning, kleiner dan de open spanning en een stroom, kleiner dan de kortsluitstroom optreden. De werkelijke bedrijfstoestand zal dus tussen deze beide grenzen liggen.

Verder zullen we de bijzondere problemen, die bij het toepassen van ijzerkernen optreden (hysteresis, wervelstromen, verzadiging), kort behandelen.

2. Verband tussen wisselstroom en wisselspanning bij spoelen met één en met meer windingen. Zelfinductie

We beginnen er mee een sinusvormig met de tijd veranderende wisselspanning te leggen aan een enkele draadwinding, waarvan we de weerstand verwaarloosbaar klein onderstellen, terwijl zijn zelfinductie L is. Na het bereiken van de stationnaire toestand blijkt, dat zich een wisselstroom I heeft ingesteld, die evenredig is met de wisselspanning en omgekeerd evenredig met de zelfinductie van de winding en verder omgekeerd evenredig met de frequentie f van de wisselspanning. Deze wisselstroom verandert eveneens sinusvormig met de tijd, waarbij de frequentie dezelfde is als die van de spanning (fig. 1). Onder de frequentie verstaan we het aantal perioden per tijdseenheid; als tijdseenheid nemen we de secunde. Een periode is verlopen, als bv. de spanning van nul stijgende via het positieve maximum, nul en het negatieve maximum weer nul heeft bereikt. Een periode kan men laten overeenkomen met 360° of $2\,\pi$ radialen (afgekort: rad), omdat een roterende lijn, die een hoek van $360° = 2\,\pi$ radialen heeft doorlopen, weer bij het nulpunt is beland. Bekijken we het sinusvormige verloop van spanning en stroom bv. met een oscillograaf, dan blijkt, dat de stroom 90° in fase achter de spanning verloopt, dat wil zeggen de stroom bereikt pas zijn positieve maximale waarde, als de ogenblikswaarde van de spanning van het positieve maximum afkomende juist weer nul is geworden. Men kent aan een wisselstroom de effectieve waarde 1 A toe, als hij in eén bepaalde weerstand gemiddeld dezelfde warmtehoeveelheid per secunde opwekt als een gelijkstroom van 1 A; voor een sinusvormige stroom is de effectieve waarde $I = I_{max}/\sqrt{2}$, als I_{max} de maximale momentele waarde is. Het overeenkomstige geldt voor sinusvormige wisselspanningen (zie Deel 2, hfdst. II.A).

Het gedrag van de wisselstroom door de draadwinding ten gevolge van een sinusvormige wisselspanning kunnen we als volgt beschrijven. De stroom verkrijgt een grootte en een verloop zo, dat de door hem opgewekte magnetische wisselflux een wisselspanning in de winding opwekt, die op ieder ogenblik gelijk en tegengesteld is aan de aangelegde spanning, zodat spanningsevenwicht is bereikt. We willen controleren, of we vanuit dit gezichtspunt het in fig. 1 gegeven verloop van de wisselstroom en de wisselspanning bij een spoel kunnen begrijpen. In hfdst. IX hebben we gezien, dat een gelijkspanning U aan een spoel met de zelfinductie L een eenparig oplopende stroom I doet ontstaan. Is L klein en is U groot, dan moet de stroom vlug oplopen om een aan U gelijke inductieve tegenspanning te kunnen opwekken, en omgekeerd. Immers, bij één winding is $U_{ind} = -U = -d\,\Phi/dt$; verder is $\Phi = L\,I$, daarom ook $U = L\,d\,I/dt$. Dit houdt in, dat de steilheid van het oplopen van I, ofwel de verandering van I met de tijd dI/dt gelijk is aan U/L. Dit houdt verder in, dat de stroom I na verloop van de tijd t de waarde $I = t\,U/L$ heeft bereikt, als U op het tijdstip $t = 0$ aan de spoel werd gelegd. Tenslotte kunnen we ook nog

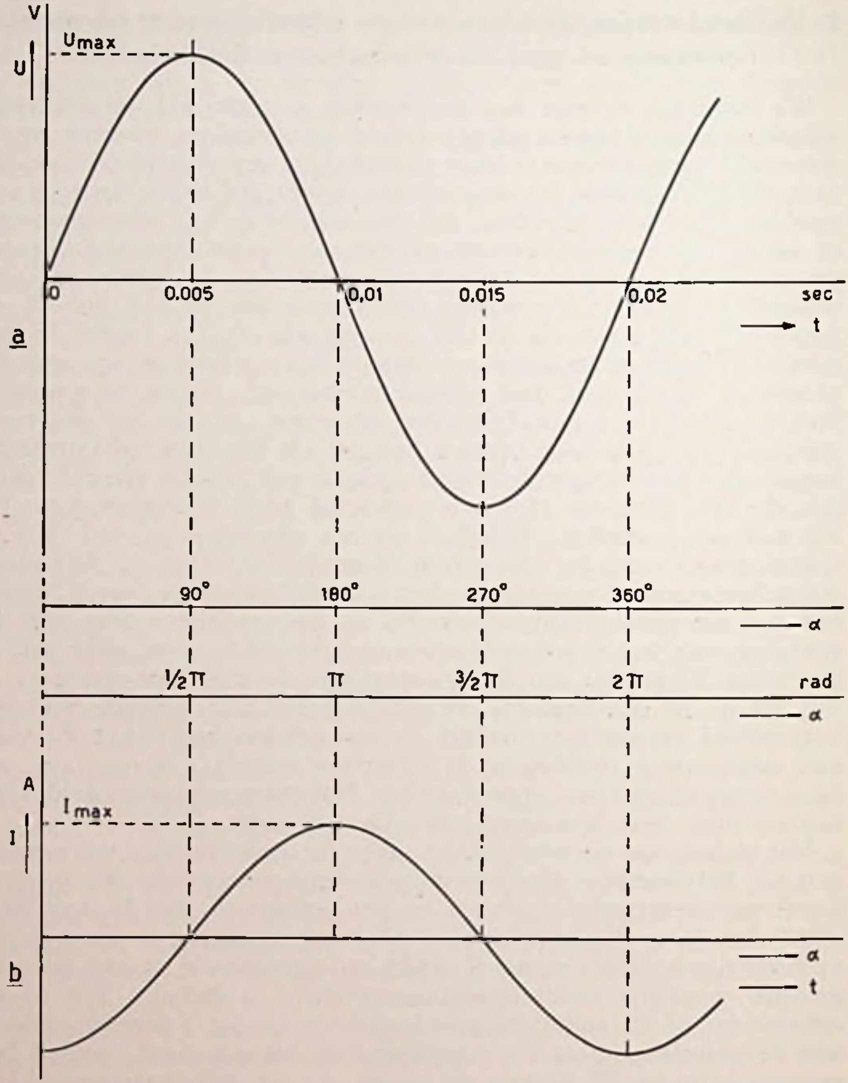


Fig. 1. Verloop van de stroom I in een verliesvrije spoel (b), als er een sinusvormig met de tijd verlopende spanning U mee is verbonden en de stationnaire toestand is ingetreden. De stroom verandert eveneens sinusvormig met de tijd, en wel met dezelfde frequentie als de spanning; hij blijft echter 90° ofwel $\pi/2$ radialen in fase achter bij de spanning. De momentele waarde van de wisselspanning kan worden weergegeven door $u = U_{max} \sin \alpha$, de momentele waarde van de stroom door $i = I_{max} \sin(\alpha - 90°)$ ofwel $i = I_{max} \sin(\alpha - \pi/2)$. Waar de spanning het vlugst verandert, dit is bij 0°, 180° en 360°, heeft de stroom zijn grootste positieve of negatieve waarde; waar de spanning de grootste waarde heeft, dit is bij 90° en 270°, echter momenteel niet verandert, is de stroom nul.
In *a* is een wisselspanning met de frequentie 50 Hz getekend.

zeggen, dat de flux, die ten tijde t in de éénwindingsspoel aanwezig is, eenvoudig de van o tot t werkzaam geweest zijnde voltsecunden representeert, dat wil zeggen $\Phi = U\,t$, onafhankelijk daarvan, hoe groot de zelfinductie van deze éénwindingsspoel is.

Deze bij een constante spanning gewonnen inzichten passen wij nu toe op ons geval, waar de spanning aan een éénwindingsspoel sinusvormig met de tijd verandert. In dit geval zal voor de momentele waarde van de spanning op ieder tijdstip gelden: $u = d\Phi/dt = L\,di/dt$, als i de momentele waarde van de stroom op dit zelfde tijdstip is. Dit houdt in, dat de steilheid van het oplopen van de stroom op een willekeurig ogenblik is: $di/dt = u/L$. Dit houdt verder in, dat de stroom met een bedrag $i_2 - i_1 = \frac{1}{L}\int u\,dt$ is veranderd, als i_1 en i_2 de stromen zijn op de tijdstippen t_1 resp. t_2, terwijl tussen t_1 en t_2 een spanningsimpuls van $\int_{t_1}^{t_2} u\,dt$ voltsecunden op de winding heeft gewerkt. Verder kunnen wij zeggen, dat de ten tijde t_2 in de éénwindingsspoel aanwezige flux met dit aantal voltsecunden, weber genoemd, is veranderd sinds het tijdstip $t = t_1$; $\Phi_2 - \Phi_1 = \int_{t_1}^{t_2} u\,dt$, onafhankelijk van de grootte van de zelfinductie van de spoel. Door wisselstroom wordt gemiddeld geen lading in één richting getransporteerd, maar slechts heen en weer bewogen. De wisselstroom en daarmee de wisselflux moeten dus om de nullijn evenveel naar de positieve als naar de negatieve zijde slingeren.

Als wij nu fig. 1b met fig. 1a vergelijken, zien wij op het oog, dat dit het geval is. Bij 0° bv. is $u = 0$, terwijl ook $di/dt = 0$; bij 90° heeft u zijn grootste waarde, terwijl ook i het vlugst verandert enz. Verder dient de momentele waarde van de flux zijn grootste waarde te bereiken, als de veranderlijke spanning van nul aan stijgende de langste tijd in één richting werkzaam is geweest; inderdaad is dat hier het geval, bv. bij 180°; dan is Φ een bedrag $\int u\,dt$ groter dan bij 0°. Dit komt daarop neer, dat $\Phi_{180} - \Phi_0$ gelijk moet zijn aan het oppervlak tussen de sinus-kromme en de horizontale as in fig. 1a tussen 0° en 180°. Nu is bij één winding $\Phi = L\,I$, dus moet dan ook $I_{180} - I_0$ gelijk zijn aan dit oppervlak gedeeld door L.

Om dit alles ook numeriek te bepalen kunnen we hetgeen uit de wiskunde bekend is van het gedrag van de sinus en de cosinus van een hoek te hulp roepen (fig. 2). We zetten op de x-as de hoek α uit in radialen ($1° = 2\,\pi/360$ rad) en op de y-as sin α (fig. 2a) resp. — cos α = sin (α — 90°) (fig. 2b). Dan is voor iedere willekeurige hoek α cos α gelijk aan de steilheid van de sinuskromme ter plaatse van deze α, ofwel $d\,(\sin\alpha)/d\,\alpha = \cos\alpha$. Verder is het vlak tussen de

sinuskromme en de x-as tussen twee waarden α_2 en α_1, dus $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha \, d\alpha$, gelijk aan het verschil van de waarden uit de negatieve cosinuskromme bij α_2 en α_1, dus $-\cos \alpha_2 + \cos \alpha_1$, als wij het vlak bv. in cm^2 meten en als maatstaf voor de horizontale en de verticale as de cm hebben gekozen. Bij de bepaling van het oppervlak worden de gedeelten onder de x-as negatief gerekend.

Als wij nu een sinusvormige wisselspanning onderstellen met $U_{max} = 1$ V, die een frequentie van 1 hertz (Hz) = 1 periode per secunde heeft en dus een volle periode in 1 sec doorloopt, dan is de sinuskromme van fig. 2a een juiste weergave van het verloop van deze spanning met de tijd, als wij langs de horizontale as een schaalverdeling schrijven, waarbij een hoek α van 2π rad overeenkomt met een tijd van 1 sec. De momentele waarde van de wisselspanning ten tijde t kan dan worden bepaald uit $\sin \alpha$, waarbij $\alpha = 2\pi t$. Is echter de frequentie van de wisselspanning bv. f Hz, zodat hij dus in 1 sec f perioden doorloopt, dan dienen wij bij 2π rad een tijd van $1/f$ als tijdmaatstaf te vermelden. De momentele waarde van de spanning ten tijde t wordt dan berekend uit $\sin \alpha$ met

$$\alpha = 2\pi f t = \omega t, \qquad (1)$$

waarbij ω de cirkelfrequentie wordt genoemd, gemeten in rad/sec. Geven we nu nog aan de maximale spanning een willekeurige waarde in plaats van 1 V, dan zien we, dat de momentele waarde u van een sinusvormig met de tijd veranderende wisselspanning kan worden voorgesteld door:

$$u = U_{max} \sin \omega t. \qquad (2)$$

Gaan we nu even terug naar het geval, dat $U_{max} = 1$ V en $f = 1$ Hz, waarbij de sinuskromme van fig. 2a een directe weergave van het verloop van de spanning is, dan blijkt, dat de negatieve cosinuskromme van fig. 2b een getrouwe weergave is van de in één winding met een willekeurige zelfinductie optredende flux, gemeten in voltsecunden, als wij ook hier $\alpha = 2\pi$ rad overeen laten komen met een tijd van 1 sec. De waarden, die wij uit deze kromme voor een bepaald tijdstip aflezen, beantwoorden namelijk aan de wetten, die het verloop van de flux beheersen: $d\Phi/dt = u$; $\Phi_2 - \Phi_1 = \int_{t_1}^{t_2} u \, dt$. Daar bij de éénwindingsspoel $I = \Phi/L$, is voor $f = 1$ Hz en een willekeurige waarde U_{max} van de wisselspanning:

$$\Phi_{mom} = -U_{max} \cos \alpha \text{ en } i = -\frac{U_{max} \cos \alpha}{L}.$$

We beschouwen nu een geval met een frequentie, afwijkend van 1 Hz, bv. groter; de verandering van de spanning en dientengevolge ook die van de stroom en de flux verlopen daarbij overeenkomstig vlugger.

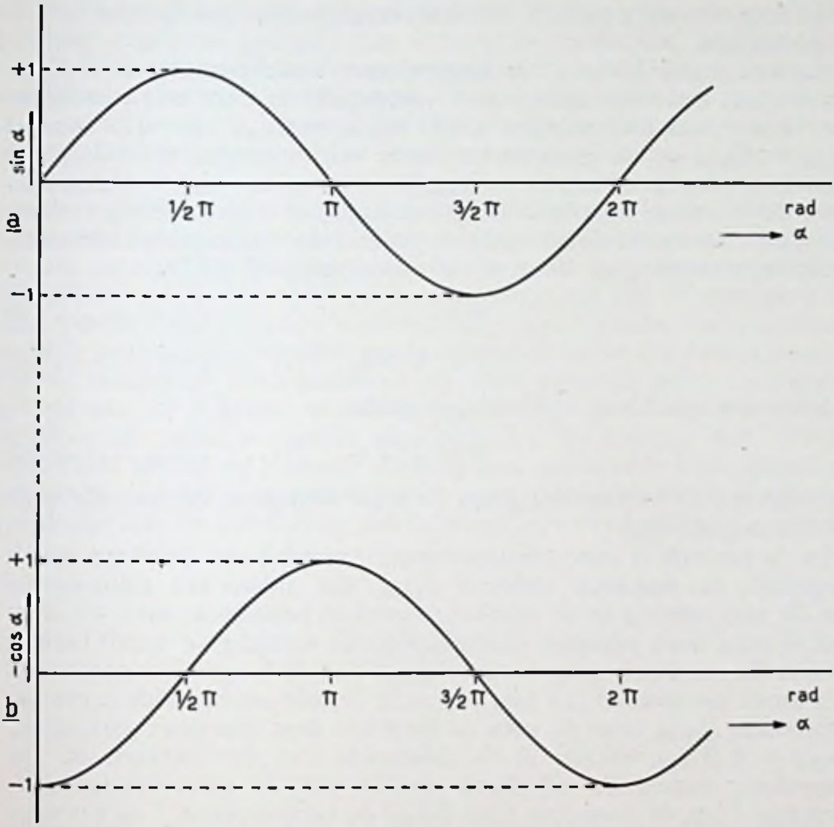


Fig. 2. a. sin $\alpha = f(\alpha)$; b. — cos $\alpha = f(\alpha)$. α is in radialen aangegeven; 2π rad = 360°.

Om evenwicht met dezelfde waarde van de wisselspanning aan de spoel te bereiken, behoeven dan de stroom en de flux slechts een waarde omgekeerd evenredig met de frequentie te hebben. Om fig. 2b ook voor andere frequenties dan $f = 1$ Hz ofwel $\omega = 2\pi$ rad/sec te kunnen benutten, dienen wij de daar afgelezen waarden voor de bepaling van Φ_{mom} en i door ω te delen en voor de bepaling van de steilheid $d\Phi_{mom}/dt$ en di/dt met ω te vermenigvuldigen. Immers de krommen van fig. 2 zijn uitgezet als functie van $\alpha = \omega t$; als we in fig. 2b een steilheid of in fig. 2a een oppervlak aflezen, steeds zijn deze waarden betrokken op een waarde van de x-as: $d\alpha = d\omega t$, die een factor ω te groot is. Een steilheid afgelezen in fig. 2b, betrokken op de verandering van α, moet dus met ω worden vermenigvuldigd om de steilheid, betrokken op de overeenkomstige verandering in tijd t te verkrijgen. Een oppervlak, afgelezen in fig. 2a met de zijde $\alpha_2 - \alpha_1$

moet door ω worden gedeeld om de overeenkomstige waarde voor $t_2 - t_1$ te verkrijgen.

Samenvattend kunnen we zeggen: een wisselspanning $u = U_{max}$ sin ωt aan een éénwindingsspoel veroorzaakt in deze een wisselflux, die voorgesteld kan worden door $\Phi_{mom} = \Phi_{max} \cos \omega t$, waarbij $\Phi_{max} = U_{max}/\omega$; de momentele waarde van de stroom door de spoel kan worden berekend uit $i = - I_{max} \cos \omega t$, waarbij $I_{max} = U_{max}/\omega L$. Voor de effectieve waarden, die bij een sinus- of cosinusvormig verloop gelijk zijn aan de maximale waarden gedeeld door $\sqrt{2}$, gelden uiteraard dezelfde betrekkingen. Voor een éénwindingsspoel geldt:

$$\Phi = U/\omega; \qquad (3)$$

$$I = U/\omega L. \qquad (4)$$

Voor een spoel met n windingen geldt:

$$\Phi = U/n\,\omega, \qquad (5)$$

waarvan wij de beredenering aan de lezer overlaten; de formule voor I blijft ongewijzigd.

In de practijk is voor transformatoren, waarbij een ijzerkern wordt toegepast, de maximale inductie B_{max}, die tijdens een sinus-cyclus van de netspanning in de ijzerkern optreedt, belangrijk; men wil deze niet te hoog laten oplopen, omdat anders de verzadiging wordt bereikt en o.a. de maximale momentele waarde van de magnetiseringsstroom zeer groot kan worden (zie blz. 263). Uit de voor een bepaalde ijzersoort toelaatbare B_{max} volgt de voor de kern van deze ijzersoort toelaatbare $\Phi_{max} = A\,B_{max}$, waarbij A de doorsnede van de ijzerkern is. De samenhang tussen de effectieve waarde van de sinusvormige netspanning U_{eff}, de maximale flux Φ_{max}, de netfrequentie f en het windingsaantal n wordt verkregen door omvorming van $U_{max} = n\,\omega\,\Phi_{max}$ [zie (5)]:

$$U_{eff} = U_{max}/\sqrt{2} = n\,\omega\,\Phi_{max}/\sqrt{2} = 4{,}44\,n\,f\,\Phi_{max}. \qquad (6)$$

3. Open spanning en kortsluitstroom bij de transformator. Koppelingsfactor en wederzijdse inductie

We gaan nu weer terug naar onze draadwinding met verwaarloosbare weerstand, waarmee een wisselspanning U_1 is verbonden en waarin dientengevolge een wisselflux Φ ontstaat, die inductief dezelfde spanning in de winding opwekt, waardoor zich spanningsevenwicht in deze primaire keten instelt. Plaatsen we nu een geïsoleerde winding met dezelfde afmetingen en eveneens met verwaarloosbare weerstand er onmiddellijk tegen aan (fig. 3), dan gaat daar dezelfde wisselflux door en wekt tussen de uiteinden van deze secundaire spoel inductief dezelfde wisselspanning op, wat grootte en verloop met de tijd aangaat. Deze is in evenwicht met de in de primaire spoel aangelegde spanning.

Is dus op een bepaald moment het ene uiteinde van de primaire winding maximaal positief, dan is van de secundaire winding het overeenkomstige uiteinde eveneens maximaal positief. Bij deze transformator met windingsverhouding $t = 1 : 1$ en volledige koppeling door middel van de magnetische flux (koppelingsfactor $k = 1$ ofwel 100 %) is de secundaire open wisselspanning gelijk aan de primaire.

Sturen we door de primaire winding een wisselstroom I_1, dan ontstaat er een wisselflux, die volledig door beide windingen gaat. Sluiten we de secundaire winding kort, dan ontstaat er een secundaire wisselstroom, zo sterk en van een zodanig verloop, dat de er door opgewekte wisselflux op ieder ogenblik gelijk en tegengesteld aan de opwekkende flux wordt. Daar primaire en secundaire spoel gelijke vorm hebben en zich practisch op dezelfde plaats bevinden, komt dit daar op neer, dat de secundaire kortsluitstroom op ieder ogenblik gelijk en tegengesteld aan de primaire stroom moet zijn (fig. 4). Daar de som van de door de spoelen gaande wisselflux bij kortsluiting nul wordt, wordt dan ook in de primaire winding geen inductieve tegenspanning opgewekt, al vloeit er wisselstroom door. De primaire zelfinductie wordt dus hier bij kortsluiting van de secundaire winding nul: $L_{1\ k} = 0$.

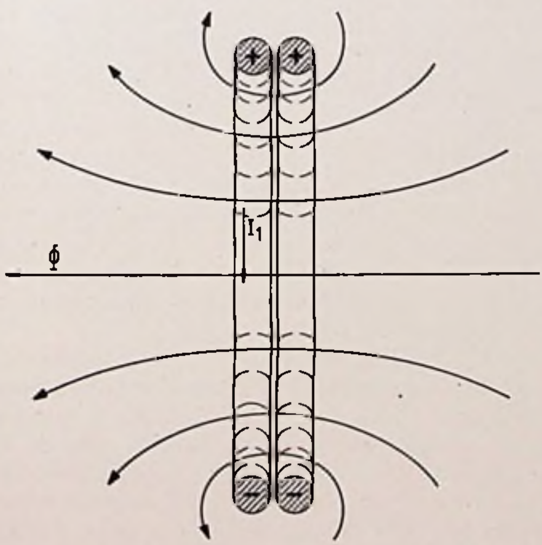


Fig. 3. Aan een draadwinding (links) wordt een wisselspanning gelegd. Deze wekt een wisselstroom I_1 en daarmede verbonden een wisselflux Φ op. Wordt een geïsoleerde open winding van dezelfde afmetingen (rechts) onmiddellijk tegen de eerstgenoemde winding geplaatst, dan wordt door de wisselflux in deze tweede spoel, wat grootte en verloop als functie van de tijd aangaat, dezelfde wisselspanning opgewekt. Is in de eerste winding op een bepaald ogenblik het ene uiteinde positief, dan is dat ook bij het overeenkomstige uiteinde van de tweede winding het geval.

We vatten samen:

a. windingsverhouding 1 : 1, koppelingsfactor $k = 1$:

$$U_{2\,o} = U_1;\ I_{2\,k} = I_1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

Het gedrag van de transformator kunnen we nu op twee verschillende wijzen beïnvloeden, en wel door de windingsverhouding te veranderen (transformatie) of door de spoelen van elkaar te verwijderen (verkleinen van de koppeling). We beginnen met de verandering van de windingsverhouding, met het transformeren in eigenlijke zin. We delen hiertoe de draaddoorsnede van de secundaire spoel in fig. 3 bv. door een langs- en een dwarssnede, die zeer dun zijn, in vier gelijke kwadranten, waardoor we dus vier van elkaar geïsoleerde windingen verkrijgen, ieder met een begin- en een eindaansluiting. Verbinden we de beginaansluitingen onderling en eveneens de eindaansluitingen onderling, dan gedraagt zich deze transformator evenzo als de boven onder *a* besprokene met de windingsverhouding 1 : 1. We schakelen nu echter de secundaire windingen achter elkaar, door het begin van de tweede met het einde van de eerste te verbinden enz., zodat als secundaire aansluitingen het begin van de eerste winding en het einde van de laatste winding overblijven. We hebben nu een transformator met de windingsverhouding 1 : n, in ons voorbeeld 1 : 4, verkregen, terwijl de koppeling onveranderd maximaal $k = 1$ is gebleven.

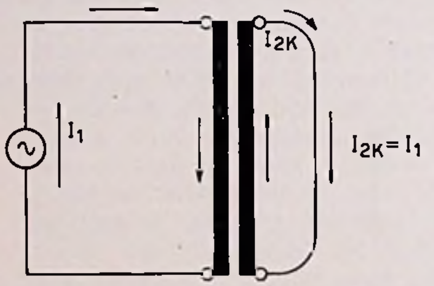


Fig. 4. Sluiten we de secundaire winding van fig. 3 kort, terwijl we door de primaire winding een wisselstroom I_1 sturen, dan vloeit er in de secundaire winding een kortsluitstroom $I_{2\,k}$, die, wat grootte en verloop als functie van de tijd aangaat, gelijk is aan I_1, echter op ieder ogenblik de tegengestelde richting heeft.

Leggen we nu de wisselspanning U_1 aan de primaire spoel, dan verkrijgen we aan de secundaire aansluitingen $n\,U_1$ als open spanning, omdat de optredende flux in iedere secundaire winding dezelfde spanning U_1 met hetzelfde verloop als functie van de tijd opwekt, en deze spanningen door de serieschakeling bij elkaar worden opgeteld. Sluiten we nu de n in serie geschakelde secundaire windingen kort, en sturen we weer de stroom I_1 door de primaire winding, dan zal de werking van de ontstane flux juist worden opgeheven, als de stroomverdeling over de secundaire geleiderdoorsnede dezelfde is als bij de boven besproken 1 : 1 transformator. Dit is hier het geval als $I_{2\,k} = I_1/n$.

We vatten samen:

b. windingsverhouding 1 : n; $k = 1$;

$$U_{2\,o} = n\,U_1;\ I_{2\,k} = I_1/n. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

We bespreken nu het verkleinen van de koppeling. Hierbij gaan we weer terug tot de 1 : 1-transformator van fig. 3, waarbij we nu de secundaire winding op een zekere afstand van de primaire plaatsen (fig. 5). Van de door de primaire spoel opgewekte flux Φ gaat slechts een gedeelte $k\,\Phi$ ($k < 1$) door de secundaire winding. Houdt dus een bepaalde wisselflux Φ een spanning U_1 in de primaire winding in

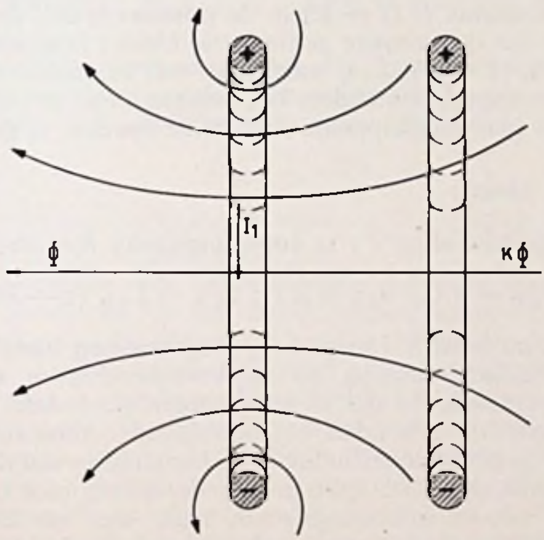


Fig. 5. We verplaatsen de secundaire spoel van fig. 3 in open toestand zover, dat er van de wisselflux Φ slechts het gedeelte $k\,\Phi$ doorheen gaat ($k < 1$). De open secundaire wisselspanning en de secundaire kortsluitstroom worden dan slechts het k-voudige van die in fig. 3 en 4.

evenwicht, dan zal een wisselflux $k\,\Phi$ in de secundaire wikkeling, die gelijk is aan de primaire wikkeling, een spanning $k\,U_1$ opwekken. We sluiten nu de secundaire winding kort, terwijl we een wisselstroom I_1 door de primaire winding sturen. Van de bijbehorende wisselflux treedt het gedeelte $k\,\Phi$ door de secundaire winding en wekt hierin een stroom $I_{2\,k}$ op, die een flux $k\,\Phi$ in tegenfase doet ontstaan, zodat de werking van de veroorzakende flux juist in evenwicht wordt gehouden. We bedoelen met tegenfase, dat het verloop als functie van de tijd 180° in fase is verschoven, hetgeen hetzelfde is als wanneer we zeggen: deze flux heeft hetzelfde verloop, maar is tegengesteld gericht. De flux $k\,\Phi$ in tegenfase wordt verkregen, als $I_{2\,k} = k\,I_1$, terwijl de richting van de stromen in de twee windingen op ieder ogenblik tegengesteld is.

Om de verandering van de primaire zelfinductie bij kortsluiting van de secundaire winding te bepalen behoeven we alleen daaraan te

denken, dat van de tegengestelde flux $k\,\Phi$, die van de secundaire kortsluitstroom afkomstig is, in onze opstelling slechts het k-voudige, dat wil zeggen $k^2\,\Phi$, in tegenfase door de primaire winding wordt omvat, zodat de primaire winding nu in het geheel slechts $\Phi - k^2\,\Phi = = \Phi\,(1 - k^2)$ omvat. Een wisselstroom I, die bij open secundaire winding de flux Φ en de bijbehorende inductieve tegenspanning U in de primaire winding opwekte, veroorzaakt bij kortgesloten secundaire winding slechts de flux $\Phi\,(1 - k^2)$ en dus een inductieve tegenspanning van slechts $U\,(1 - k^2)$ in de primaire spoel. Anders gezegd betekent dit, dat de primaire zelfinductie kleiner is geworden en wel is $L_{1\,\mathrm{k}} = L_{1\,\mathrm{o}}\,(1 - k^2)$. $L_{1\,\mathrm{k}}$ wordt ook wel de primaire spreidingszelfinductie genoemd, omdat deze het ontstaan dankt aan de spreidingsflux, die niet gemeenschappelijk met beide spoelen is gekoppeld.

We vatten samen:

c. windingsverhouding 1 : 1; koppelingsfactor $k < 1$:

$$U_{2\,\mathrm{o}} = k\,U_1;\; I_{2\,\mathrm{k}} = k\,I_1;\; L_{1\,\mathrm{k}} = L_{1\,\mathrm{o}}\,(1 - k^2). \quad \ldots\ldots (9)$$

We passen nu behalve lossere koppeling ook nog transformatie toe, door de secundaire winding op de bovenbeschreven manier in n windingen te splitsen, die dan in serie worden geschakeld. We kunnen dan de afzonderlijk gehouden beschouwingen combineren. De verandering van de primaire zelfinductie bij kortsluiting van de secundaire wikkeling wordt door het splitsen van de laatste niet beïnvloed en hangt alleen van de koppelingsfactor, maar niet van de windingsverhouding af. Van dit feit wordt gebruik gemaakt om de koppelingsfactor van twee gekoppelde spoelen te bepalen, door $L_{1\,\mathrm{o}}$ en $L_{1\,\mathrm{k}}$ te meten.

We vatten samen:

d. windingsverhouding $1 : n$; koppelingsfactor $k < 1$:

$$U_{2\,\mathrm{o}} = n\,k\,U_1;\; I_{2\,\mathrm{k}} = k\,I_1/n;\; L_{1\,\mathrm{k}} = L_{1\,\mathrm{o}}\,(1 - k^2). \quad \ldots\ldots (10)$$

Voor het rekenen met transformatoren wordt in plaats van de windingsverhouding n en de koppelingsfactor k dikwijls ook een grootheid M, de zogenaamde *wederzijdse inductie* gebruikt, die beiden samenvat. De wederzijdse inductie wordt evenals de zelfinductie in Vsec/A ofwel henry gemeten. De zelfinductie L is o.a. een maat voor de wisselspanning U, die in een spoel zelf wordt opgewekt als er een wisselstroom I door vloeit: $U = I\,\omega\,L$. De wederzijdse inductie is een maat voor de wisselspanning U_2, die in een tweede spoel wordt opgewekt, als door de eerste een wisselstroom I_1 vloeit:

$$U_2 = I_1\,\omega\,M. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

De samenhang tussen M en k is gegeven door

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

als L_1 en L_2 de primaire resp. secundaire zelfinductie zijn, gemeten bij open secundaire resp. primaire spoel. Dit is aan ons voorbeeld met koppeling k en windingsverhouding n als volgt te zien.

Secundaire open spanning: $U_2 = k\,n\,U_1$. Primaire spanning bij open secundaire wikkeling: $U_1 = I_1\,\omega\,L_1$. Nu is $n = \sqrt{L_2/L_1}$, dus $U_2 = = I_1\,\omega\,k\sqrt{L_1 L_2}$.

Het omgekeerde is eveneens juist. Als wij de secundaire wikkeling van onze transformator voeden met de stroom I_2, dan is de primaire open spanning door dezelfde wederzijdse inductie M bepaald:

$$U_1 = I_2\,\omega\,M. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Dit blijkt op overeenkomstige wijze: $U_1 = k\,U_2/n$; $U_2 = I_2\,\omega\,L_2$; $1/n = \sqrt{L_1/L_2}$; $U_1 = I_2\,\omega\,k\sqrt{L_1 L_2}$.

We hebben ons bij onze beschouwingen gehouden aan het bijzonder eenvoudige voorbeeld van een transformator, waarbij de primaire en de secundaire spoel dezelfde vorm hadden, terwijl een losse koppeling bereikt werd door de spoelen zo langs hun gemeenschappelijke as te verschuiven, dat de symmetrie bewaard bleef. Uit experimenten en uit beschouwingen over magnetische energie van het veld van twee gekoppelde spoelen, waarop wij hier niet nader ingaan, blijkt, dat de in het eenvoudige voorbeeld afgeleide betrekkingen geldig blijven, al hebben de spoelen willekeurige vormen en posities. Men kan dan alleen niet zo gemakkelijk zien, hoe een bepaalde koppeling of wederzijdse inductie tot stand komt. In het algemene geval bepalen wij n niet als windingsverhouding, maar als $\sqrt{L_2/L_1}$ door L_1 en L_2 te meten als de andere wikkeling open is, en beschouwen k niet als een gedeelte van de flux, maar bepalen k uit de meting van de zelfinductie bij kortgesloten andere spoel door toepassing van de betrekkingen $L_{1\,\mathrm{k}} = L_1\ (1 - k^2)$ en $L_{2\,\mathrm{k}} = L_2\ (1 - k^2)$.

4. De belaste transformator

We willen nu nagaan, welke invloed een belasting aan de secundaire zijde van een transformator uitoefent op de primaire zijde. We nemen de transformator van fig. 3 en 4 met $n = 1$, $k = 1$, zonder weerstand, waarbij we een wisselspanning van constante effectieve waarde U_1 verbinden met de primaire winding. Er loopt bij open secundaire winding primair een stroom $I_1 = U_1/\omega\,L_1$, als ω de cirkelfrequentie van de wisselspanning is en L_1 de primaire zelfinductie, gemeten bij open secundaire winding. I_1 is 90° in fase verschoven ten opzichte van U_1. I_1 wordt de magnetisatiestroom genoemd; hij wekt de magnetische wisselflux op, die de primaire spanning in evenwicht houdt.

Aan de secundaire zijde ontstaat een spanning $U_2 = U_1$, waarvan de polariteit en de fase aan de primaire en aan de secundaire zijde dezelfde zijn. Sluiten we nu een of ander verbruiksapparaat, bv. een weerstand R, aan de secundaire zijde aan, dan zal er een wisselstroom $I_2 = U_2/R$ doorheen vloeien, die in fase is met U_2. Deze stroom zal door de secundaire wikkeling vloeien en een bepaalde wisselflux opwekken, die de oorspronkelijke flux op een of andere wijze verstoort. Door deze verstoring wordt het evenwicht tussen de inductieve tegenspanning in de primaire winding en U_1 verstoord; dit wordt hersteld, doordat naast I_1 nu bovendien een stroom vanuit de spanningsbron door de primaire winding vloeit, die op ieder ogenblik gelijk en tegengesteld gericht is aan I_2. Uit fig. 4 blijkt, dat dan de spanningsbron naast de magnetiseringsstroom evenveel stroom primair met dezelfde fase in de transformator doet vloeien als er secundair door R weer wordt afgenomen. Voor U_1 en voor R maakt het dus geen verschil, of R aan de secundaire zijde van de transformator of direct aan U_1 is aangesloten; de magnetisatiestroom I_1 blijft in beide gevallen eveneens vloeien; de gehele schakeling gedraagt zich voor wisselspanningen als een parallelschakeling van R en L_1, ongeacht of R primair of secundair is aangesloten.

Vervangen we nu deze transformator door een transformator met de transformatieverhouding 1 : n en de koppelingsfactor 1 en sluiten we weer dezelfde belasting R aan, dan komt de n-voudige spanning over deze weerstand te staan en vloeit er de n-voudige stroom door. Deze n-voudige stroom vloeit echter nu door n in plaats van één secundaire winding; de verstorende invloed op de wisselflux, die de primaire spanning in evenwicht houdt, is dus n^2 keer die bij de 1 : 1-transformator. Deze verstorende invloed wordt opgeheven, doordat de spanningsbron U_1 nu naast de magnetisatiestroom een stroom in de primaire wikkeling doet vloeien, die n^2 keer zo groot is als bij de 1 : 1-transformator. Voor de spanningsbron heeft dus de secundaire belasting R dezelfde uitwerking alsof een belasting R/n^2 parallel aan de primaire zelfinductie zou zijn aangesloten. Men ziet, dat bij de transformatie wel stroom en spanning, maar niet het vermogen wordt gewijzigd. Immers, een weerstand R neemt bij $n\,U_1$ secundair hetzelfde vermogen af, als de spanningsbron U_1 aan de getransformeerde weerstand R/n^2 levert.

Voor de bepaling van de gecombineerde magnetisatie- en getransformeerde belastingsstroom in de primaire wikkeling mogen niet eenvoudig de effectieve waarden van deze twee stromen worden opgeteld. Immers, de magnetisatiestroom heeft 90° faseverschuiving ten opzichte van de primaire spanning, de getransformeerde belastingsstroom bij ons voorbeeld van een weerstandsbelasting is echter in fase met de primaire spanning. Hoe men in fase verschoven wisselstroomgrootheden bij elkaar kan optellen wordt in Deel 2, hfdst. II.A en hfdst. III.A bij de voorstelling van wisselstromen door vectoren en complexe getallen behandeld.

5. De ideale transformator

De transformator van fig. 3, waar we onze beschouwingen aan opbouwden, is vergeleken met een werkelijke transformator al vereenvoudigd en geïdealiseerd; met name hebben we de weerstanden van de wikkelingen verwaarloosbaar klein gesteld en bovendien de meest vaste koppeling aangenomen, om tot de principiële grondslagen door te kunnen dringen. Het enige, wat nog het beeld van de zuivere transformatie verstoort, is de primaire magnetisatiestroom. Deze kunnen we echter, althans in gedachten, eveneens verwaarloosbaar klein verkrijgen, door de primaire zelfinductie zeer groot te maken, hetzij door het windingsaantal te verhogen, hetzij door de spoelen op een kern met hoge permeabiliteit te wikkelen, waarbij we weer het materiaal van deze kern ideaal onderstellen, dat wil zeggen: we onderstellen de permeabiliteit ook bij de grootste flux constant, dus geen verzadiging en geen verliezen door hysteresis of wervelstromen. Willen we een ideale 1 : 1-transformator verkrijgen, dan dient de secundaire zelfinductie gelijk aan de primaire te zijn; willen wij een transformator met een transformatieverhouding 1 : n verkrijgen, dan moet $L_2 = n^2 L_1$ worden gemaakt.

Op grond van dezelfde gedachtengang, die wij boven aan het voorbeeld met een weerstand aan de secundaire zijde hebben uiteengezet, kunnen wij het gedrag van een ideale transformator, die willekeurig is belast en een transformatieverhouding 1 : n heeft, als volgt samenvatten. De secundaire spanning is $U_2 = n\, U_1$; de secundaire stroom is $I_2 = I_1/n$. U_2 is in fase met U_1; I_2 is in fase met I_1. Een weerstand R en een zelfinductie L, aangesloten aan de secundaire zijde, vormen voor de spanningsbron een belasting, alsof er R/n^2 resp. L/n^2 op was aangesloten; een capaciteit C aan de secundaire zijde belast de bron als $n^2\, C$. Een spanningsbron met de wisselspanning U_1 en de inwendige weerstand R_i samen met een ideale 1 : n-transformator vertegenwoordigt aan de secundaire klemmen daarvan een spanningsbron met de spanning $n\, U_1$ en de inwendige weerstand R_i/n^2.

6. De werkelijke en de ideale transformator. Vervangschema's

Een werkelijke transformator onderscheidt zich van een ideale door zijn eindige zelfinductie, door zijn niet volledige koppeling, door de weerstand van de wikkelingen, en bij toepassing van een magnetische kern ter verhoging van de zelfinductie en de koppeling, door de hierin opgewekte verliezen. De eindige zelfinductie kan men zich parallel aan de ene zijde van een ideale transformator geschakeld denken, omdat daardoor magnetisatiestroom wordt verbruikt, al is verder niets aangesloten. De onvolledige koppeling kan men weergeven door een spreidingszelfinductie in serie met de primaire of de secundaire wikkeling of beide van de ideale transformator te schakelen; de hierin verloren gaande wisselspanning hangt namelijk af van de stroom, die

het verbruiksapparaat afneemt; hetzelfde geldt voor de weerstand van de wikkelingen, die we dus ook in serie met de wikkelingen geschakeld denken. De verliezen door een magnetische kern hangen weer hoofdzakelijk van de aangelegde spanning en minder van de belastingsstroom af; deze verliezen kunnen daarom vertegenwoordigd worden door een parallel geschakelde weerstand.

Aan de hand van de besproken gezichtspunten kunnen we een werkelijke transformator weergeven door een vervangschema, waaraan we zijn electrisch gedrag gemakkelijk kunnen overzien, dat wil zeggen de stromen en spanningen aan de vier klemmen van de transformator, als electriciteitsbronnen en verbruiksapparaten met de transformator zijn verbonden. Of een vervangschema een werkelijke transformator juist weergeeft, kunnen we als volgt controleren. We bepalen de open spanning en de kortsluitstroom secundair en primair, terwijl we eveneens de toegevoerde wisselstroom en wisselspanning primair en secundair bij deze vier proeven bepalen zowel voor de transformator als voor het vervangschema. In beide gevallen moeten de uitkomsten dezelfde zijn. Drie willekeurige van de genoemde proeven zijn eigenlijk voldoende; het resultaat van de vierde volgt daaruit. Het blijkt, dat men voor een bepaalde transformator verschillende vervangschema's kan benutten, die gelijkwaardig zijn. Zie hiervoor Deel 2, hfdst. III.F.1.

7. De magnetisatiestroom bij het toepassen van ferromagnetische transformatorkernen

De genoemde proeven geven slechts dan volledig uitsluitsel over een transformator, als de zelfinducties en de weerstanden constant zijn. De stromen hebben dan een lineaire samenhang met de spanningen, dat wil zeggen bij de dubbele wisselspanning loopt ook de dubbele wisselstroom; in een dergelijk geval spreekt men ook van een lineair netwerk. Een luchttransformator zal zich practisch als een lineair netwerk gedragen. Door de magnetische krachten, die bij grote stroom optreden, zouden de spoelen een weinig kunnen worden vervormd, waardoor de zelfinductie en de koppeling iets zouden kunnen veranderen; door de verwarming neemt de weerstand van de wikkelingen iets toe; streng genomen hangen dus ook hier de gegevens van de transformator enigszins van de belasting af. De verandering van de zelfinductie zal echter verwaarloosbaar klein zijn en de iets meer merkbare verandering van de weerstand kan zonder principiële moeilijkheden in rekening worden gebracht.

Passen we echter, ter verhoging van de zelfinductie en van de koppeling, een kern uit ijzer of ander magnetisch materiaal toe, dan treden wegens de niet-lineariteit van de magnetiseringskromme [$\Phi = f\ (I)$ of $B = f\ (H)$] complicaties van meer principiële aard op, die we nu in het kort willen bespreken, benevens enkele verliezen, die bij het wisselend magnetiseren in kernen uit magnetisch materiaal

optreden. In de practijk houdt men de magnetisatiestroom liefst zo klein, dat men toch in grote trekken met de boven gegeven beschouwingswijze kan blijven werken.

Bij de toepassing van magnetisch materiaal in een spoel heeft een sinusvormige spanning een niet meer sinusvormige magnetisatiestroom ten gevolge, waarvan de maximale momentele waarde naar verhouding

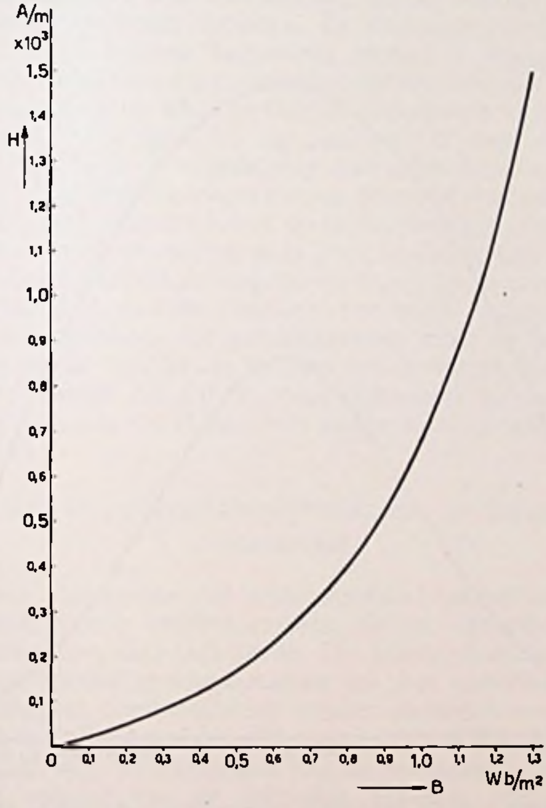


Fig. 6. Gemiddelde magnetiseringskromme van een gebruikelijk met silicium gelegeerd transformatorblik.

zeer groot kan worden, als de verzadiging van het magnetische materiaal benaderd of zelfs overschreden wordt. Dit kan als volgt worden ingezien.

In fig. 6 is de gemiddelde magnetiseringskromme in de voor onze beschouwingen gemakkelijke vorm $H = f(B)$ voor een met silicium gelegeerd transformatorblik gegeven; hierbij is dus geen acht geslagen op het, bij dit blik betrekkelijk kleine, verschil tussen de stijgende en de dalende tak van de hysteresiskromme. Als we nu bv. aan een nettransformator denken, dan veroorzaakt de aan de primaire wikkeling

liggende sinusvormige netspanning een eveneens sinusvormige met de tijd veranderende flux in de ijzerkern. De samenhang tussen de netspanning en de maximale tijdens de verandering optredende flux Φ_{max} is door form. (6) gegeven. Als we aan een ijzerkern denken, die over de gehele lengte $l \ldots$ (m) een constante doorsnede $A \ldots$ (m²) heeft, dan is $B_{max} = \Phi_{max}/A$.

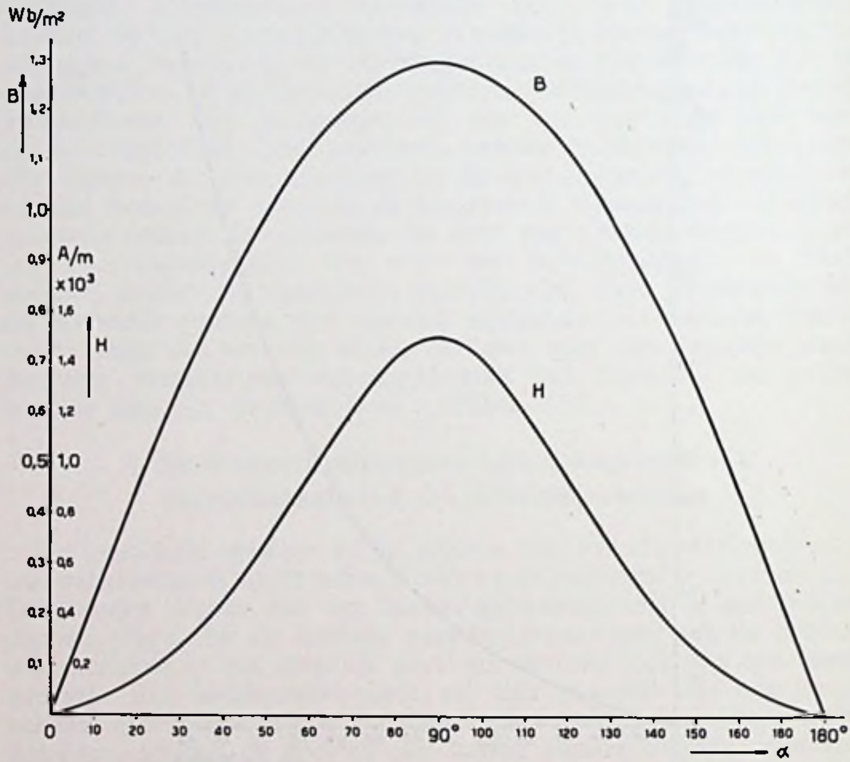


Fig. 7. Het verloop van de benodigde magnetische veldsterkte H als functie van de tijd, als er in het blik van fig. 6 een sinusvormig met de tijd veranderende inductie B met een maximum van 1,3 Wb/m² moet worden opgewekt. Als maatstaaf voor de abscis is gekozen $\alpha = \omega t$, waarbij t de tijd en ω de cirkelfrequentie van de wisselende inductie is.

We kunnen nu een bepaalde B_{max} kiezen en zijn dan nog vrij, of we de voorwaarde van form. (6) met toepassing van een kleine kerndoorsnede en meer primaire windingen n of door een dikke kern en minder windingen vervullen. Als we van de faseverschuiving tussen flux en spanning afzien, wordt het verloop van B als functie van de tijd weergegeven door $B = B_{max} \sin \alpha$, waarbij $\alpha = \omega t \ldots$ (rad). We kunnen nu voor iedere momentele waarde van B uit fig. 6 de waarde

van H aflezen, die voor het opwekken van deze B nodig is; in fig. 7 is dit verloop van B en het bijbehorende verloop van H als functie van de tijd voor het transformatorenblik van fig. 6 weergegeven. Het verloop van de magnetisatiestroom als functie van de tijd heeft dezelfde vorm als H; de momentele waarden van deze stroom kunnen worden berekend uit $i = H\,l/n$.

Bij het inschakelen van nettransformatoren kunnen tijdelijk zeer grote magnetisatiestromen optreden. In stationnaire toestand varieert de flux, zoals wij hebben besproken, tussen $+\Phi_{max}$ en $-\Phi_{max}$ heen en weer. Schakelt men nu toevallig op dat moment van de sinusvormige netspanning in, waar de flux in stationnaire toestand door nul zou gaan, dat wil zeggen bij de positieve of negatieve maximale momentele waarde van de netspanning, dan gebeurt er niets bijzonders; de flux en de magnetisatiestroom nemen direct het stationnaire verloop aan. Schakelt men echter op het meest ongunstige moment in, met name als de momentele netspanning door nul gaat, dan loopt de flux in de eerste halve periode tot ongeveer 2 Φ_{max} op, hetgeen in verband met de verzadiging van de ijzerkern een sterke magnetisatiestroom tengevolge kan hebben, die gelukkigerwijze door de weerstand van de wikkeling wordt beperkt. In de loop van de volgende perioden gaat het slingeren tussen nul en 2 Φ_{max} geleidelijk in de stationnaire toestand over, waarop wij echter niet nader in willen gaan (zie Deel 2, hfdst. III.E.8).

8. Hysteresis- en wervelstroomverliezen in ferromagnetisch materiaal

Het gebruik van kernen uit ferromagnetisch materiaal in spoelen, die met wisselstroom worden gevoed, brengt *hysteresisverliezen* en *wervelstroomverliezen* met zich mede. De hysteresisverliezen ontstaan door het voortdurend ommagnetiseren van het materiaal en worden in warmte omgezet. Deze verliezen kunnen electrisch worden bepaald door het vlak in de hysteresislus, dat een product $H\,B$ vertegenwoordigt (hfdst. IX, fig. 69); we verkrijgen dan de verliezen betrokken op de eenheid van volume van de gebruikte ijzerkern, dus gemeten in Wsec/m³. Dit is als volgt in te zien. We onderstellen, dat de magnetisering in een bepaalde gesloten ijzerkern met de doorsnede A en de gehele lengte l van de magnetische weg bij iedere periode de weg GACDEFG doorloopt (zie hfdst. IX, fig. 69). Dan vertegenwoordigt $B\,A\,n$ de voltsecunden $\oint U\,dt$, die aan de klemmen van de wikkeling met n windingen optreden, als we de weerstand van de wikkeling buiten beschouwing laten. $H\,l/n$ vertegenwoordigt de stroom I door de wikkeling. De verbruikte resp. teruggeleverde electrische energie is gegeven door

$$\int_{t_1}^{t_2} I\,U\,dt = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} I\,d\Phi = \frac{1}{A}\int_{B_1}^{B_2} H\,dB, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

waarbij Φ_1 en B_1 de flux resp. de inductie voorstellen ten tijde t_1 enz.

Of energie verbruikt dan wel aan de bron wordt teruggevoerd kunnen wij daaraan zien, of de inductief opgewekte spanning tegen de stroom inwerkt ofwel deze ondersteunt. Tijdens het doorlopen van de tak GA neemt de stroom toe, de inductief opgewekte spanning werkt tegen; als A is bereikt, heeft iedere volume-eenheid van de kern een energie opgenomen, die met het vlak O G A B_s overeenkomt. Tijdens de tak A G behoudt de stroom zijn oude richting, neemt echter af, waardoor de inductief opgewekte spanning van polariteit omkeert er nu meewerkt. Uit iedere volume-eenheid wordt energie teruggeleverd, die met het vlak A B_s C overeenkomt. De met het verschil tussen beide vlakken overeenkomende energie is in iedere volume-eenheid van de kern voor het ommagnetiseren verbruikt en wordt als verwarming van de kern merkbaar. Van C tot E keert de stroomrichting om, terwijl de inductief opgewekte spanning wegens het dalen van de stroom zijn richting behoudt; hier wordt dus weer energie door de kern opgenomen; tussen E en F vindt energieteruglevering en tussen F en G energie-opname plaats. Op deze wijze blijkt, dat inderdaad het vlak binnen de hysteresislus als verschil overblijft van de vlakken, die energie-opname en energie-afgifte van de kern vertegenwoordigen. Wordt de kern tijdens de cyclus niet tot aan de verzadiging gemagnetiseerd, dan zijn uiteraard het vlak in de hysteresislus en daarmee de hysteresisverliezen kleiner. De hysteresisverliezen nemen voor een bepaald materiaal bij gelijke B_{max} evenredig met de frequentie toe, omdat het aantal malen, dat de hysteresislus per secunde wordt doorlopen, gelijk is aan de frequentie.

Een ander soort ijzerverliezen, de wervelstroomverliezen, nemen ongeveer evenredig met het kwadraat van de frequentie toe als we B_{max} bij de verschillende frequenties constant houden. Deze verliezen vinden hun oorzaak daarin, dat de wisselflux niet alleen in de omgevende windingen, maar ook in de ijzerkern electrische spanningen opwekt, die tot stromen in het ijzer aanleiding geven. De inductief opgewekte spanning is bij gelijke flux evenredig met de frequentie, het energieverlies in de weerstand van de ijzerkern (U^2/R) dus evenredig met het kwadraat van de frequentie.

Deze wervelstromen worden bestreden door de ijzerkern op te bouwen uit blikken, die zo van elkaar zijn geïsoleerd, dat in de richting dwars op de flux rondlopende stromen zo goed mogelijk worden onderdrukt. Deze stromen worden verder verzwakt door ijzerblik te gebruiken, dat met silicium is gelegeerd, waardoor zijn weerstand groter wordt. Bijzonder gunstig zijn met het oog op wervelstromen de ferrieten, bv. ferroxcube, die meer of minder goede isolatoren zijn, zodat ook bij hoge frequenties weinig of geen wervelstromen optreden. De soortelijke weerstand van deze materialen ligt tussen 1 en 10^5 Ω m.

9. De voormagnetisering van ferromagnetisch materiaal door gelijkstroom

Tot slot zij nog op een feit gewezen, dat bv. bij smoorspoelen in netspanningsgelijkrichters en bij luidsprekertransformatoren belangrijk is. In deze gevallen loopt hetzij de gelijkgerichte stroom hetzij de anodestroom door de wikkeling, dat wil zeggen een gelijkstroom,

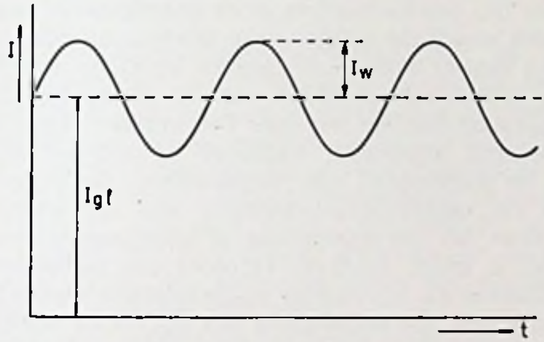


Fig. 8. De stroom I, die de som is van een gelijkstroom I_{gl} en een wisselstroom met de maximale waarde I_w, uitgezet als functie van de tijd t.

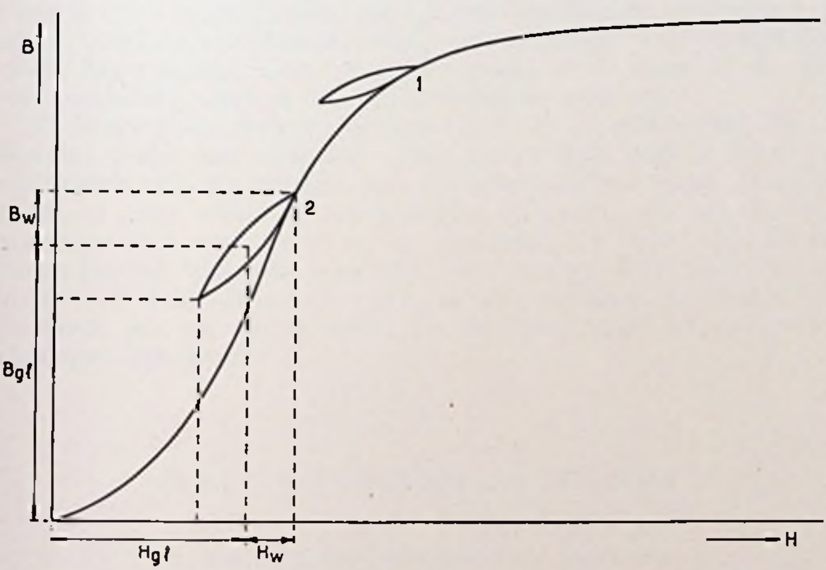


Fig. 9. De inductie B als functie van de tijd in een smoorspoel met ijzerkern, waar een stroom I als in fig. 8 voorgesteld door vloeit, is weergegeven door de lussen 1 en 2. Lus 1 heeft een grotere gelijkstroomvoormagnetisatie dan lus 2, echter dezelfde wisselmagnetisering: $H_{gl_1} > H_{gl_2}$; $H_{w_1} = H_{w_2}$. De wisselfluxpermeabiliteit B_w/H_w is in geval 2 groter dan in geval 1. De getrokken lijn is de maagdelijke magnetiseringskromme van de desbetreffende ijzerkern.

waarop een rimpel of een laagfrequente wisselstroom is gesuperponeerd (zie fig. 8). Hier verkrijgt de ijzerkern een vaste gelijkstroommagnetisatie B_{gl}, waaromheen een kleine met 2 I_w overeenkomende hysteresislus wordt beschreven (zie fig. 9). Bij grote waarden van B_{gl} wordt de gemiddelde steilheid van deze lus, dus de verandering van de flux als functie van de momentele waarde van I_w, klein; het kan daarom nuttig zijn, de gelijkstroomvoormagnetisatie van de ijzerkern te verminderen door bv. een luchtspleet in de magnetische weg te introduceren. Hierdoor wordt de magnetische weerstand vermeerderd, zodat de flux en B_{gl} kleiner worden. We komen hierdoor in een gebied van B_{gl}, waar de gemiddelde steilheid van de genoemde lus belangrijk groter is. Weliswaar hebben we door het introduceren van de luchtspleet een element ingevoerd, waardoor op zichzelf de wisselfluxsteilheid van de smoorspoel zou verminderen; doch de winst in de steilheid van de magnetiseringskromme kan dit verlies belangrijk overtreffen. Voor het berekenen van afvlaksmoorspoelen met luchtspleet zie Deel 3, hfdst. VI.E.16. De door ons bedoelde gemiddelde wisselfluxsteilheid is $\mu_w \mu_0$, waarbij μ_w de relatieve wisselfluxpermeabiliteit genoemd wordt. De verhouding van B_{gl} tot de bijbehorende H_{gl} is $\mu_g \mu_0$, waarbij μ_g de relatieve gelijkfluxpermeabiliteit heet. Voor lucht is $\mu_w = \mu_g = 1$.

XII. ELECTRISCHE MACHINES

De electrische machines worden onderscheiden in dynamo's en motoren. Aan een dynamo wordt mechanische energie toegevoerd; de machine levert electrische energie. Aan een motor wordt electrische energie toegevoerd, terwijl de machine mechanische energie levert.

Er zijn machines voor gelijkstroom en voor wisselstroom. De wisselstroommachines kunnen voor éénfase-wisselstroom of voor meerfasen-wisselstroom bestemd zijn. Voor iedere „stroomsoort" zijn een aantal verschillende constructies in gebruik, waarvan we alleen de meest voorkomende bespreken. Bij een aantal dezer kan eenzelfde machine als motor, doch ook als dynamo werken.

Al deze machines bestaan uit een stator en een rotor. De stator is een holle ijzeren cilinder, aan de binnenzijde voorzien van gleuven, waarin een wikkeling is aangebracht, waar stroom door vloeit. De rotor is een ijzeren cilinder, die op een draaibare as is bevestigd, en ook is voorzien van gleuven, waarin een wikkeling, waar stroom door vloeit. Bij sommige kleine machines draagt óf de stator óf de rotor geen wikkeling, doch is dan een permanente magneet.

De werking van al deze machines berust op de inductiewet. Bij een dynamo draait een wikkeling in een magnetisch veld of draait een magnetisch veld ten opzichte van een stilstaande wikkeling. Daardoor wordt in deze wikkeling een spanning opgewekt, die, als de keten wordt gesloten, een stroom ten gevolge heeft (zie hfdst. IX). Bij een motor bevindt zich een wikkeling, waar stroom door vloeit, in een magnetisch veld. Daardoor wordt op de wikkeling een kracht uitgeoefend, wat tot gevolg heeft, dat de rotor draait en mechanisch vermogen kan leveren.

A

GELIJKSTROOMMACHINES

1. De cilinder-inductor van Siemens

De eenvoudigste dynamo is de cilinder-inductor van Siemens. Deze bevat een permanente hoefmagneet, voorzien van poolschoenen (fig. 1). De naar elkaar toegekeerde zijden dezer poolschoenen vormen gedeelten van een cilindermantel. Tussen deze poolschoenen kan een

dubbel-T-anker draaien (fig. 2). De gleuven van het anker zijn volgewikkeld met geïsoleerde draad. De magneet veroorzaakt een magnetische flux, die door de magneet M, de poolschoenen S, het anker A, en de beide luchtspleten tussen de poolschoenen en het anker vloeit. In dit magnetisch circuit is de magnetische weerstand het grootst in de luchtspleet. Daarom worden de poolschoenen zo gevormd, dat ze zo nauw mogelijk om het anker sluiten en niet meer ruimte vrij laten

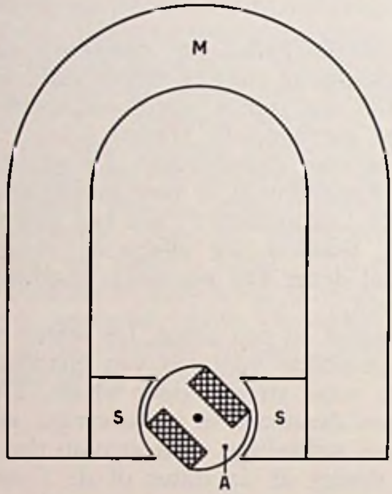


Fig. 1. Cilinder-inductor van Siemens. M. permanente magneet; S. poolschoenen; A. dubbel-T-anker.

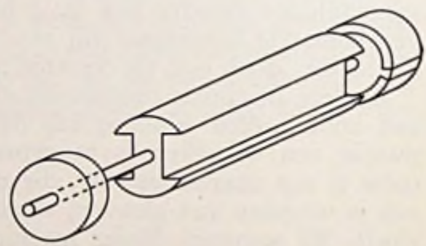


Fig. 2. Dubbel-T-anker.

dan voor het betrouwbaar draaien van het anker nodig is. Dan is de flux Φ_m het grootst. De magneet met de poolschoenen is de stator, het bewikkelde T-anker de rotor. Volgens hfdst. IX wordt in de wikkeling van het draaiend anker een electrische spanning U opgewekt.

$$U = w \frac{d\Phi}{dt}, \qquad \text{(1)}$$

waarbij Φ de flux is, die op het beschouwde ogenblik door één winding wordt omsloten en w het aantal windingen voorstelt. We onderstellen nu eenvoudigheidshalve, dat de magnetische flux Φ_m in het anker homogeen is, en dat iedere winding een even grote flux omvat. Bij het dubbel-T-anker is dit niet geheel het geval; bij de machines, die we verder zullen bespreken, zijn deze onderstellingen veel beter benaderd.

We noemen het aantal omwentelingen per secunde f. (Het aantal omwentelingen per minuut is dus $n = 60\ f$.) Een punt van het draaiende anker legt dus per secunde een boog (dus ook een hoek) $f \times 2\pi$ af. We noemen $2\pi f = \omega$ de hoeksnelheid van het anker.

Gaan we uit van de stand van de rotor, waarbij het vlak van de wikkelingen samenvalt met de richting van de magnetische flux, dan is de flux, die door een winding wordt omvat,

$$\Phi = \hat{\Phi} \sin \omega t \quad \text{(2)}$$

(de maximale waarde van een sinusvormig veranderlijke grootheid duiden we aan door het teken ^ boven de desbetreffende letter).

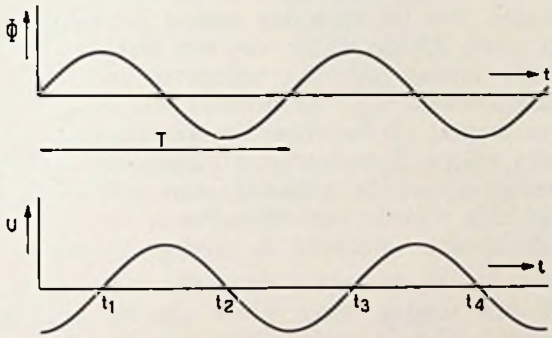


Fig. 3. De magnetische flux Φ en de in de ankerwikkeling geïnduceerde spanning V als functie van de tijd bij de cilinder-inductor volgens fig. 1. T. de periode.

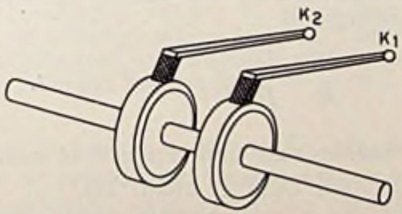


Fig. 4. Sleepringen met borstels.

Volgens (1) is de spanning, die in de wikkeling wordt opgewekt,

$$U = -w\,\omega\,\hat{\Phi} \cos \omega t = -\hat{U} \cos \omega t. \quad \text{(3)}$$

In fig. 3 zijn Φ en U als functie van t aangegeven. De zo verkregen spanning is dus een wisselspanning. Om deze spanning te kunnen toevoeren aan een uitwendige keten worden de einden van de wikkeling ieder verbonden met een ring van koper of een ander goed geleidend metaal. Deze beide ringen, sleepringen genaamd, zijn geïsoleerd op de as bevestigd (fig. 4). Op de sleepringen rusten twee verende contacten, borstels genaamd. Gewoonlijk zijn deze borsteld blokjes kool. Deze stilstaande borstels zijn verbonden met de beide klemmen K_1 en K_2,

waaraan de uitwendige keten kan worden aangesloten. We hebben nu een wisselstroombron verkregen met de open spanning $U = U_m \cos \omega t$ en een inwendige weerstand R_i gelijk aan de weerstand van de wikkeling. Bovendien bezit de wikkeling een bepaalde zelfinductie. Hoe de invloed van deze zelfinductie bij het beschouwen van de stroom in de uitwendige keten in rekening moet worden gebracht, wordt behandeld in Deel 2, hfdst. III. We onderstellen voorlopig eenvoudigheidshalve, dat de invloed van deze zelfinductie en van de inwendige weerstand R_i zo klein is, dat deze kan worden verwaarloosd.

De wisselingen van de spanning tussen de klemmen K_1 en K_2 geschieden zo snel, dat de wijzer van een meetinstrument deze niet kan volgen. De uitslag, die een voltmeter geeft, die tussen deze klemmen is aangesloten, is de gemiddelde waarde van de uitslag, die zou worden verkregen, als de wijzer de veranderingen in de spanning wel zou kunnen volgen. Sluiten we een draaispoelmeter aan, waarvan de uitslag evenredig is met de spanning, dan geeft deze geen uitslag, daar de gemiddelde waarde van $\cos \omega t$ over een gehele periode nul is. Een hittedraadmeter, waarvan de uitslag evenredig is met $U^2 = \hat{U}^2 \cos^2 \omega t$, indien de wijzer de snelle wisselingen zou kunnen volgen, geeft een uitslag, even groot als bij een gelijkspanning $U_g = {}^1/_2 \sqrt{2}\, \hat{U}$, daar de gemiddelde waarde van $\cos^2 \omega t$ ${}^1/_2$ is (zie hfdst. V), en in dit geval is $U_g{}^2 = {}^1/_2\, \hat{U}^2$. We noemen ${}^1/_2 \sqrt{2}\, \hat{U}$ de effectieve waarde van de wisselspanning $\hat{U} \cos \omega t$ (zie Deel 2, hfdst. II).

Sluiten we een weerstand R aan tussen de klemmen, dan is de stroom door deze weerstand

$$I = \frac{U}{R} = \frac{\hat{U}}{R} \cos \omega t = \hat{I} \cos \omega t. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

De gemiddelde waarde van deze stroom is nul, en de effectieve waarde ${}^1/_2 \sqrt{2}\, \hat{I}$ (zie ook Deel 2, hfdst. II).

De wisselspanning, die in de wikkeling wordt opgewekt, kunnen we omvormen tot een gelijkspanning. Daartoe worden de uiteinden van de wikkeling verbonden met twee geleidende stukken koper B en C, die geïsoleerd op de as A zijn bevestigd, en met het isolatiemateriaal D een cilinder vormen (fig. 5). Deze cilinder wordt *commutator* genoemd. Op deze meedraaiende commutator rusten twee borstels E en F. Deze stilstaande borstels zijn verbonden met de beide klemmen K_1 en K_2. De plaats van deze borstels op de commutator is zo, dat telkens als de spanning U nul is, dus op de ogenblikken t_1, t_2, t_3 enz. van fig. 3, de borstels van het ene segment naar het andere overgaan. Het gevolg hiervan is, dat de spanning tussen de klemmen K_1 en K_2 op deze ogenblikken wordt omgekeerd, waardoor deze als functie van de tijd verloopt zoals fig. 6 aangeeft. We hebben dus een gelijkspanning verkregen, die evenwel niet constant is, doch tweemaal per omwenteling nul wordt.

Sluiten we tussen de klemmen K_1 en K_2 een weerstand R aan, bv. een gloeilamp, dan vloeit er een stroom door de keten. Daar de spanning U niet constant is, is de stroom I ook niet constant; volgens de wet van Ohm is op ieder ogenblik $U = I\,R$. De stroom verloopt dus als functie van de tijd op dezelfde wijze als de spanning.

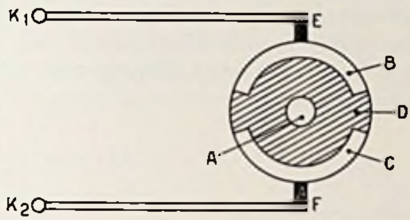


Fig. 5. Commutator. A. as; B, C. geleidende segmenten; D. isolatiemateriaal; E, F. borstels; K_1 en K_2. klemmen.

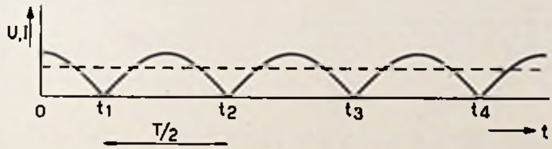


Fig. 6. De spanning tussen de klemmen K_1 en K_2 van de commutator volgens fig. 5, als deze op de as van de inductor volgens fig. 1 is aangebracht. De streeplijn geeft de gemiddelde waarde van deze spanning aan.

Sluiten we tussen de klemmen K_1 en K_2 een draaispoel-voltmeter aan, dan wijst deze de gemiddelde waarde van de spanning aan. Deze is gelijk aan de gemiddelde waarde van één periode van fig. 6, dit is een halve periode $T/2$ van fig. 3. De geïnduceerde gelijkspanning U_i is dus

$$U_i = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_2} \hat{U} \cos\omega t\, dt = \frac{2}{\pi}\hat{U}. \qquad (5)$$

Deze machine kan ook als gelijkstroommotor werken. Daartoe sluiten we de klemmen K_1 en K_2 aan een gelijkstroombron aan. Door de wikkeling van het anker vloeit dan een gelijkstroom. De wikkeling ondervindt nu in het magnetisch veld een koppel, zoals in hfdst. IX is aangegeven. De rotor draait daardoor tot de wikkeling een zo groot mogelijke flux omvat, die volgens een rechtse schroef is toegevoegd aan de richting van de stroom. Doch op dit ogenblik gaan de borstels over op de andere segmenten, waardoor de stroom door de wikkeling

de andere richting krijgt. De rotor draait nu verder, daar de krachten, die op de wikkeling werken, de tegengestelde richting krijgen. In fig. 7 zijn de richtingen der krachten aangegeven voor de twee verschillende stroomrichtingen door de wikkeling. Wanneer het vlak der windingen loodrecht staat op de richting van het magnetisch veld, is de arm van het koppel nul, dus het koppel ook. Bij iedere volledige omwenteling wordt dus tweemaal een „dood punt" gepasseerd.

Worden de aansluitingen van de klemmen K_1 en K_2 aan de stroombron verwisseld, dan keert de draairichting van de motor om, zoals uit fig. 7 kan worden afgeleid.

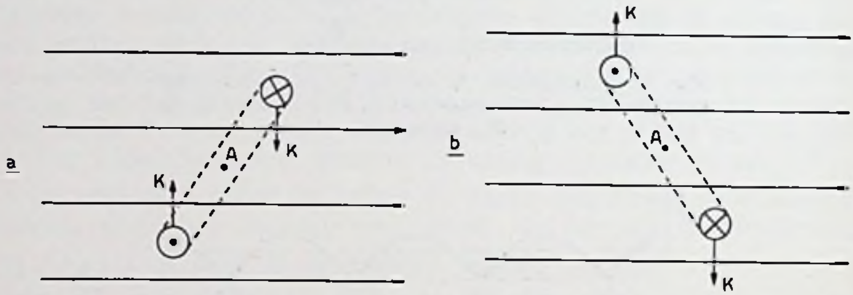


Fig. 7. Richtingen der krachten, die een winding, waar stroom door vloeit, ondervindt in een magnetisch veld, voor twee gevallen. De horizontale pijlen geven de richting van het magnetisch veld aan. A. as, waarom de winding kan draaien. De stroomrichting naar ons toe is door een stip, die van ons af door een kruis aangeduid. K. krachten, die op de geleider werken. In beide gevallen draait de winding rechtsom.

Wanneer de machine als motor draait, wordt in de wikkeling evengoed een spanning U_i opgewekt als bij de werking als dynamo. Deze spanning is tegengesteld gericht aan de spanning U_u, die aan de klemmen K_1 en K_2 uitwendig is aangesloten. Het verschil dezer spanningen is $U_u - U_i = I R_i$, waarbij I de stroom door de wikkeling en R_i de weerstand van de wikkeling, dit is de inwendige weerstand van de machine, is. Wordt de motor gebruikt om mechanische arbeid te leveren, dan wordt op de as een uitwendig mechanisch koppel uitgeoefend, tegengesteld gericht aan de draairichting. Daardoor zal de rotor langzamer draaien, en de in de wikkeling opgewekte tegenspanning U_i afnemen, waardoor de stroom $I = \dfrac{U_u - U_i}{R_i}$ toeneemt. Het vermogen $U_u I$, dat aan de motor wordt toegevoerd, is gelijk aan het vermogen $I^2 R_i$, dat in de wikkeling in warmte wordt omgezet, vermeerderd met het vermogen, dat mechanisch wordt geleverd, nl. het vermogen, dat de as als mechanisch vermogen afgeeft, en het vermogen, dat nodig is om de wrijving van de as te overwinnen.

2. De gelijkstroom-collectormachine

De onder 1 beschreven machine bezit enkele ongewenste eigenschappen, die in de practijk vooral bij grote machines bezwaren opleveren.

Het is moeilijk, met een permanente magneet een grote magnetische flux Φ te verkrijgen. Daarom wordt in plaats daarvan een electromagneet gebruikt. De wikkeling van deze electromagneet kan worden verbonden met een afzonderlijke stroombron (fig. 8a), doch kan ook worden verbonden aan de klemmen K_1 en K_2, waar de borstels van

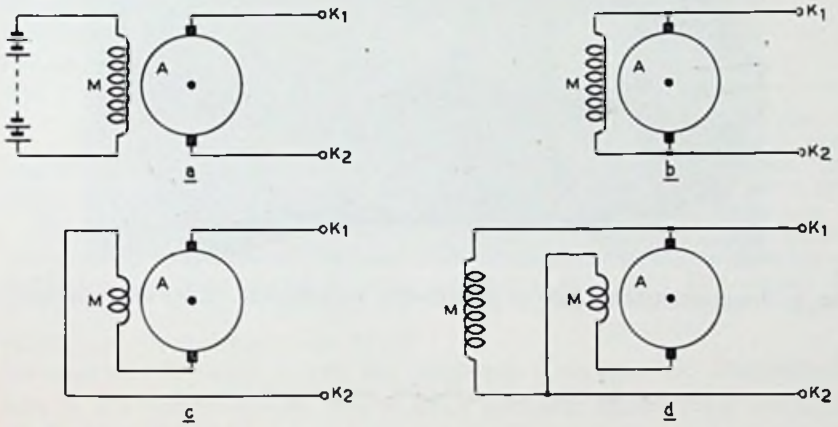


Fig. 8. a. Gelijkstroommachine met afzonderlijke voedingsbron voor de magneetstroom; b. shuntmachine; c. seriemachine; d. compoundmachine. A. anker; M. magneetwikkeling; K_1, K_2. uitwendige klemmen.

de rotor op zijn aangesloten (fig. 8b). Men spreekt dan van een shuntwikkeling. Ook kan de wikkeling van de magneet in serie met de rotorwikkeling zijn geschakeld (fig. 8c, seriewikkeling). Soms wordt de magneet voorzien van twee afzonderlijke wikkelingen, waarvan de ene parallel aan, de andere in serie met de rotorwikkeling is geschakeld (fig. 8d, compoundwikkeling). Zowel bij de motor als bij de dynamo worden deze verschillende schakelingen aangetroffen.

De spanning, die de onder 1 beschreven machine opwekt als dynamo, is niet constant, doch verloopt als functie van de tijd zoals fig. 6 aangeeft. Dit is in de regel ongewenst. Werkt de machine als motor, dan is het geleverde koppel niet constant, doch verloopt op dezelfde wijze als de spanning in fig. 6. Een grote verbetering in dit opzicht wordt verkregen door in plaats van een dubbel-T-anker een trommelanker te gebruiken (fig. 9). Dit is een rotor, bestaande uit een massieve ijzeren cilinder, opgebouwd uit dunne cirkelvormige blikken, als bij een transformator (zie hfdst. XI). Aan de omtrek bevinden zich een

groot aantal gleuven, waarin een wikkeling van geïsoleerde koperdraden is aangebracht. Op de as is een collector aangebracht, bestaande uit onderling geïsoleerde koperen lamellen. Hun aantal is even groot als het aantal gleuven van het anker. De windingen door de gleuven zijn alle in serie geschakeld; van iedere gleuf gaat een verbinding naar een collectorlamel. Op de collector rusten twee borstels, als bij de onder 1 beschreven inductor.

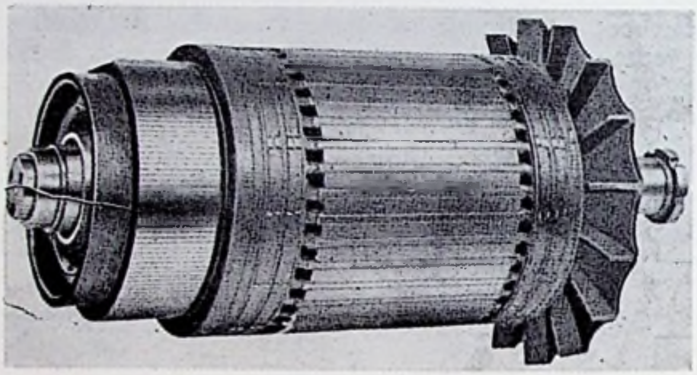


Fig. 9. Trommelanker. Links is de collector aangebracht, rechts een ventilator.

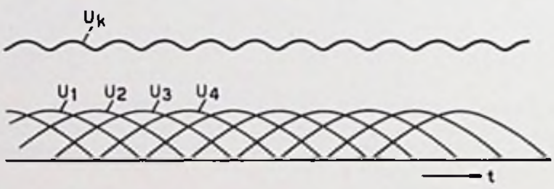


Fig. 10. De spanning van een gelijkstroomdynamo met een anker met vier spoelen. U_1, U_2, U_3, U_4. de spanningen, die in ieder der spoelen worden opgewekt; U_k. de klemspanning van de onbelaste dynamo; deze is de som der spanningen van de afzonderlijke spoelen.

Daar de wikkeling gelijkmatig langs de omtrek is verdeeld, kunnen we het anker beschouwen als bestaande uit een aantal dubbel-T-ankers, ten opzichte van elkaar over een kleine hoek verschoven. De spanning tussen de borstels is dan de som van de spanningen van ieder deelanker. Deze spanningen zijn ten opzichte van elkaar in de tijd verschoven; hun som is dus vrijwel constant; er blijft slechts een kleine rimpel over. In fig. 10 is dit voor vier spanningen aangegeven. Uit (3) en (5) volgt, dat de gemiddelde spanning voor één deelanker bedraagt

$$V_g = \frac{2}{\pi} w \omega \hat{\Phi}. \qquad (6)$$

Daar de verschillende deelankers in serie zijn geschakeld, is de

gelijkspanning, die aan de borstels wordt verkregen, de som der gelijkspanningen van de deelankers, dus wordt ook door (6) aangegeven, als we onder w het totale aantal windingen van het anker verstaan. Daar $\omega = 2\pi f$ kan (6) ook geschreven worden als

$$V_g = 4\,w\,f\,\hat{\Phi}. \qquad (7)$$

Door (6) of (7) wordt de spanning aangegeven, die in de wikkeling wordt opgewekt, dus de klemspanning als er geen stroom vloeit, dit is de open spanning U_0. Wordt tussen de klemmen een weerstand aangesloten, zodat er een stroom I door het anker vloeit, dan is de klemspanning

$$U_k = U_0 - I\,R_i, \qquad (8)$$

waarin R_i de weerstand van de ankerwikkeling voorstelt.

We beschouwen nu de verschillende schakelingen voor de magneetwikkeling voor een als dynamo werkende machine. Uit form. (7) volgt, dat de spanning, die wordt verkregen, evenredig is met de frequentie f en met de magnetische flux $\hat{\Phi}$. De spanning kan dus worden geregeld door óf het toerental óf de flux óf beide te variëren.

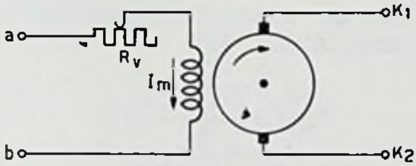


Fig. 11. Gelijkstroomdynamo met afzonderlijke voedingsbron voor de magneetstroom. Deze voedingsbron (bv. een accumulatorenbatterij) wordt aangesloten tussen de klemmen a en b. Met de voorschakelweerstand R_v kan de magneetstroom I_m en daarmee de spanning, die tussen de klemmen K_1 en K_2 wordt verkregen, worden geregeld.

We beschouwen eerst de machine, waarbij de magneetstroom wordt geleverd door een afzonderlijke bron (fig. 8a). Deze stroom kan worden gevarieerd door een regelbare weerstand R_v in serie met de magneetwikkeling op te nemen (fig. 11). Eenzelfde magnetische flux kan worden opgewekt door een wikkeling met weinig windingen, waar een grote stroom door vloeit of door een wikkeling met veel windingen, waar een kleine stroom door vloeit. Een kleine magneetstroom verdient gewoonlijk de voorkeur. De machine wordt zo geconstrueerd, dat het ijzer in het magnetisch circuit door de flux vrijwel wordt verzadigd; was dit niet het geval, dan zou met minder ijzer kunnen worden volstaan en de machine dus lichter en goedkoper kunnen zijn. Bij een gegeven machine is de spanning evenredig met het product van het toerental en de flux. Door de flux zo groot mogelijk te maken, dat wil zeggen tot de verzadiging van het ijzer, kan het toerental zo laag mogelijk zijn om de vereiste spanning te geven, hetgeen in het algemeen gewenst is.

Bij de shuntmachine (fig. 8b) is geen afzonderlijke bron nodig om de magneetstroom te leveren. Een moeilijkheid treedt op bij het eerste op gang brengen van de machine. Daar er geen magnetisch veld aanwezig is, ontstaat er geen spanning, en dus ook geen stroom

door de magneetspoelen. Doch door het ijzer eerst even te magnetiseren met behulp van een uitwendige bron is er na het wegnemen van deze bron voldoende remanent magnetisme om een kleine spanning in de wikkeling van het draaiende anker op te wekken. Deze spanning veroorzaakt een stroom door de magneetspoelen, die de flux versterkt, waardoor de opgewekte spanning toeneemt. Hierdoor neemt de magneetstroom verder toe en daardoor ook de in het anker opgewekte spanning. Dit gaat door tot het ijzer vrijwel verzadigd is; er stelt zich een evenwichtstoestand in. Door een regelbare weerstand R_V in serie met de magneetwikkeling op te nemen kan de spanning worden geregeld (fig. 12).

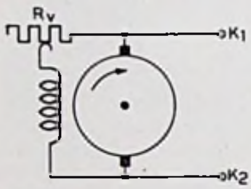


Fig. 12. Shuntdynamo met regelweerstand R_V in serie met de magneetwikkeling.

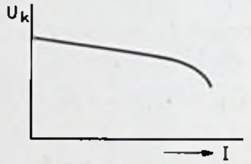


Fig. 13. De klemspanning van een shuntdynamo als functie van de belastingsstroom I bij constante voorschakelweerstand R_V.

Wordt tussen de klemmen K_1 en K_2 een belasting (weerstand) aangesloten, dan vloeit er door de ankerwikkeling behalve de kleine magneetstroom de belastingsstroom I. Ten gevolge van de weerstand van de ankerwikkeling neemt de klemspanning af; hierdoor daalt ook de magneetstroom een weinig, waardoor de klemspanning nog meer afneemt. In fig. 13 is de klemspanning als functie van de belastingsstroom aangegeven. Deze spanningsdaling kan worden opgeheven door de regelweerstand R_V kleiner te maken.

3. Verschillende soorten gelijkstroommachines

a. De seriedynamo

Bij de seriemachine vloeit de belastingsstroom door de magneetwikkeling (fig. 8c). Wordt de belastingsweerstand R_u kleiner gemaakt, dan neemt de stroom toe, waardoor ook de flux en daarmee de spanning toeneemt. Ook hier stelt zich tenslotte een evenwichtstoestand in. Een seriedynamo wordt weinig gebruikt en is alleen geschikt als de belasting vrijwel constant blijft.

b. De compounddynamo

We hebben gezien, dat bij een shuntdynamo de klemspanning daalt, doch bij een seriedynamo stijgt bij toenemende belastingsstroom. Door de magneet te voorzien van twee wikkelingen, waarvan de ene parallel aan de borstels, en de andere in serie met de uitwendige keten is

geschakeld (fig. 8d), wordt een compounddynamo verkregen, die een combinatie van een shunt- en een seriedynamo is. De beide magneetwikkelingen zijn zo geschakeld, dat ze elkaars werking versterken. Op deze wijze kan worden bereikt, dat de klemspanning vrijwel constant blijft als de belastingsstroom verandert.

Het vermogen, dat door een dynamo kan worden geleverd, wordt bepaald door de toelaatbare temperatuursverhoging van de ankerwikkelingen. De warmte-ontwikkeling is gegeven door $I^2 R_i$. Er moet dus voor worden gezorgd, dat de toelaatbare stroom niet wordt overschreden. Deze is op iedere machine aangegeven.

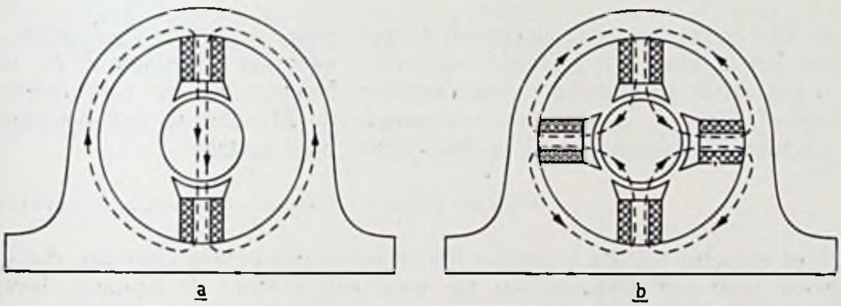


Fig. 14. a. Tweepolige machine; b. vierpolige machine.

c. *Machines met meer dan twee polen*

We hebben tot nu toe tweepolige machines beschouwd (fig. 14a). In de meeste practische gevallen worden echter machines met meer polen gebruikt (fig. 14b). Bij de tweepolige machine zijn de beide kernen van de magneet voorzien van wikkelingen, waar de stroom in zodanige richting door vloeit, dat de ene pool een noordpool is en de andere een zuidpool. De magnetische flux verloopt daarbij zoals in fig. 14a door stippellijnen is aangegeven. Bij machines met meer polen is het aantal polen steeds even en vindt men rondgaande afwisselend een noordpool en een zuidpool. De flux verloopt dan zoals in fig. 14b voor een vierpolige machine door stippellijnen is aangegeven. Wat bij de tweepolige machine geldt voor een volledige omwenteling van de rotor, geldt voor de vierpolige machine voor een halve omwenteling en bij de $2p$-polige machine voor $1/p^e$ omwenteling. Bij een vierpolige machine is daardoor, onder overigens gelijke omstandigheden, het toerental de helft van dat bij een tweepolige machine. In hetgeen volgt beschouwen we tweepolige machines; het zal de lezer niet moeilijk vallen, de resultaten toe te passen op meerpolige machines.

d. *De shuntmotor*

Wordt de machine volgens fig. 12 als motor gebruikt, dan worden de klemmen K_1 en K_2 met een gelijkspanningsbron verbonden. Door

de magneetwikkeling M vloeit een stroom, die een magnetisch veld geeft. De grootte van deze magneetstroom, dus ook de grootte van de flux $\hat{\Phi}$, kan worden ingesteld met de weerstand R_v. Door de ankerwikkeling vloeit een stroom, waardoor het anker gaat draaien. In de ankerwikkeling wordt een spanning U_i opgewekt, tegengesteld aan de richting van de klemspanning U_k. De stroom I door het anker en het toerental stellen zich zo in, dat de opgewekte spanning U_i vermeerderd met het inwendige spanningsverlies $I\,R_i$ gelijk is aan de klemspanning, dus

$$U_k = U_i + I\,R_i, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

en dat bovendien het electrisch toegevoerde vermogen $V_k\,I$ gelijk is aan het mechanisch geleverde vermogen plus het vermogen $I^2\,R_i$, dat in het anker in warmte wordt omgezet. Noemen we het mechanische koppel, dat op de as wordt uitgeoefend, M, dan is het geleverde mechanische vermogen $M\,\omega$ (zie hfdst. VI), zodat

$$U_k\,I = M\,\omega + I^2\,R_i. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

[Het verschil van de formules (8) en (9) is een gevolg daarvan, dat (8) geldt voor een dynamo en (9) voor een motor; de dynamo levert electrisch vermogen; de motor neemt electrisch vermogen op; de richting van de stroom is, bij dezelfde richting van de klemspanning, voor de dynamo en de motor verschillend.]

Bij een goed geconstrueerde motor is de weerstand R_i zo klein, dat $U_k \approx U_i$ en $U_k\,I \approx M\,\omega$. Daar $U_i = 4\,n\,f\,\hat{\Phi}$ [form. (7)], wordt het aantal omwentelingen vrijwel onafhankelijk van de stroom I en het mechanisch koppel M, dat moet worden geleverd. Bij verschillende mechanische belastingen van de motor blijft dus het aantal omwentelingen per minuut vrijwel constant. Dit is een zeer karakteristieke eigenschap van de shuntmotor. Daar R_i wel klein, doch niet nul is, neemt het aantal omwentelingen bij toenemende belasting een weinig af. Uit (10) volgt, dat de stroom I ongeveer evenredig is met het mechanisch vermogen. Het rendement van de motor, dit is het geleverde mechanische vermogen gedeeld door het toegevoerde electrische vermogen, is

$$\eta = \frac{U_k\,I - I^2\,R_i - W_v}{U_k\,I}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

waarin W_v de wrijvingsverliezen en de ijzerverliezen in de motor voorstelt. (Daar het ijzer van de rotor draait in een magnetisch veld treden daarin hysteresis- en wervelstroomverliezen op. Daarom zijn de rotor en de poolschoenen niet van massief ijzer vervaardigd, doch gelamelleerd, dit is opgebouwd uit dunne ijzeren platen.) Eenvoudigheidshalve is in de voorgaande formules met deze verliezen W_v geen rekening gehouden.

Het koppel M, dat op het anker wordt uitgeoefend, is evenredig met de ankerstroom I en met de magnetische flux $\hat{\Phi}$, dus

$$M = C\,I\,\hat{\Phi}, \qquad (12)$$

waarin C een constante is, afhankelijk van de constructie van de machine. Uit (10) en (12) volgt, dat

$$\omega = \frac{U_k - I\,R_i}{M/I}. \qquad (13)$$

Bij een shuntmotor is $\hat{\Phi}$ vrijwel constant. Uit (12) volgt, dat ook M/I vrijwel constant is. Volgens (13) neemt dus ω, en daarmee het toerental, slechts weinig af bij grotere belasting (groter koppel M).

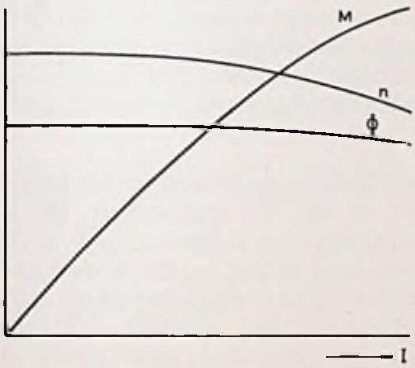


Fig. 15. De flux Φ, het toerental n en het koppel M als functie van de ankerstroom I bij een shuntmotor.

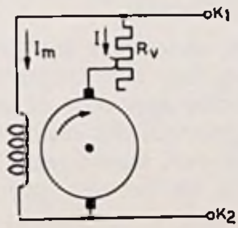


Fig. 16. Snelheidsregeling van een shuntmotor door middel van een weerstand R_v in serie met het anker.

In fig. 15 zijn voor een shuntmotor de flux $\hat{\Phi}$, het koppel M en het aantal omwentelingen n per tijdseenheid uitgezet als functie van de stroom I.

De snelheid van de motor (het aantal omwentelingen per tijdseenheid) kan op verschillende wijzen worden geregeld. Door een weerstand R_v in serie met de magneetwikkeling op te nemen (fig. 12) kan de magnetische flux worden gevarieerd. De geïnduceerde spanning U_i blijft vrijwel gelijk aan de netspanning U_k. Wordt de weerstand R_v vergroot, dan neemt de magneetstroom I_m af, waardoor de flux $\hat{\Phi}$ afneemt. Volgens (7) neemt dan het aantal omwentelingen toe.

Een andere wijze om de snelheid te regelen is aangegeven in fig. 16. Hierbij blijft de magneetstroom I_m constant, doch is een regelweerstand R_v opgenomen in serie met de ankerwikkeling. Door de spanningsval $I\,R_v$ wordt de spanning aan de borstels kleiner, terwijl de flux $\hat{\Phi}$ constant blijft. Hoe groter de weerstand R_v wordt gemaakt, des te kleiner de geïnduceerde spanning U_i en dus des te kleiner de

omwentelingssnelheid van de rotor. Snelheidsregeling met behulp van een weerstand in het rotorcircuit geeft groter energieverlies dan snelheidsregeling met behulp van een weerstand in serie met de magneetwikkeling. Daarom verdient deze laatste wijze van regelen in het algemeen de voorkeur. Een weerstand in serie met het anker doet de motor langzamer lopen; een weerstand in serie met de magneetwikkeling doet de motor sneller lopen. Ook kan men, om de snelheid te verkleinen, de rotor aansluiten aan een net met een lagere spanning, terwijl de magneetwikkeling op het net met de hogere spanning blijft aangesloten.

Het vermogen, dat een motor kan leveren, wordt bepaald door de toelaatbare temperatuursverhoging van het anker, dus door de stroom I. Bij het regelen van de snelheid behoort er voor te worden gezorgd, dat de op de motor aangegeven stroom niet wordt overschreden.

De draairichting van de motor kan worden omgekeerd door óf de magneetwikkeling óf de aansluiting aan het anker om te keren. Keert men beide om, dan blijft de draairichting dezelfde. Hieruit volgt, dat de motor in principe ook werkt bij aansluiting op een wisselspanningsnet.

e. De seriemotor

Bij de seriemotor zijn de magneetwikkeling en de ankerwikkeling in serie op het net aangesloten, zoals in fig. 8c aangegeven. Bij de shuntmotor kon voor de magneetwikkeling een wikkeling met weinig windingen van dik draad worden genomen (grote magneetstroom) of een met veel windingen van dun draad (kleine magneetstroom). Om de totale uit het net opgenomen stroom zo klein mogelijk te houden neemt men vrijwel steeds veel windingen van dun draad, zodat de magneetstroom I_m bv. 0,05 maal de ankerstroom I bedraagt. Bij de seriemotor vloeit echter de totale ankerstroom I ook door de magneetspoelen, zodat deze uit weinig windingen van dik draad bestaan.

Ook voor deze motor gelden de formules (9) en (10), mits onder R_i wordt verstaan de som der weerstanden van anker en magneetwikkeling.

Indien de mechanische belasting van de motor groot is, is het toegevoerde electrische vermogen groot, dus is de stroom I groot. Daar deze grote ankerstroom ook door de magneetwikkeling vloeit, is de magnetische flux $\hat{\Phi}$ groot, zodat reeds bij een kleine omwentelingssnelheid van de rotor de geïnduceerde spanning U_i vrijwel gelijk is aan de klemspanning U_k, waardoor aan (9) is voldaan. Is het uitwendige koppel M groot, dan draait de motor dus langzaam. Is daarentegen dit koppel M klein, dan is de omwentelingssnelheid groot. Bij een onbelaste motor wordt deze snelheid gewoonlijk groter dan toelaatbaar is. Een seriemotor mag dus nooit onbelast lopen. Bij een seriemotor past zich het toerental aan de belasting aan, zodat bij een groter worden van het uitwendige mechanische koppel het vermogen, dat uit het net wordt opgenomen, niet zoveel stijgt als bij een seriemotor, waar het toerental vrijwel constant blijft.

Bij een seriemotor is de flux $\hat{\Phi}$ bij een kleine stroom I evenredig met deze stroom; bij grote stroom treedt verzadiging van het ijzer op en neemt $\hat{\Phi}$ in mindere mate toe. Voor niet te grote stroom is dus

$$\hat{\Phi} = C_1 I_1, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

waarin C_1 een constante is, afhankelijk van de constructie van de machine. Uit (12) en (14) volgt

$$M = C\, C_1 I^2. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

Door (15) te substitueren in (13) vindt men

$$\omega = \frac{U_k - I R_i}{C\, C_1 I}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

Daar $I R_i << U_k$ is het toerental dus ongeveer omgekeerd evenredig met de stroom en volgens (15) ongeveer omgekeerd evenredig met de wortel uit het koppel M.

In fig. 17 zijn voor een seriemotor de flux Φ, het koppel M en het aantal omwentelingen n per tijdseenheid uitgezet als functie van de stroom I.

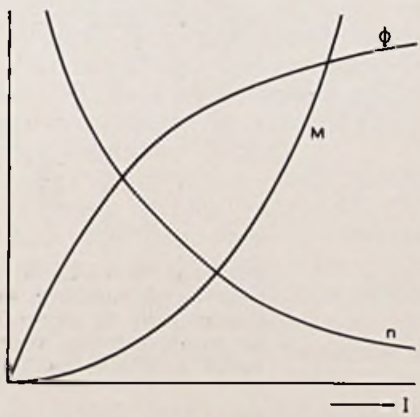


Fig. 17. De flux Φ, het toerental n en het koppel M als functie van de stroom I bij een seriemotor.

De snelheid van een seriemotor kan worden geregeld met behulp van een regelbare weerstand R_v, in serie met de motor opgenomen (fig. 18). Door de spanningsval over deze weerstand wordt de klemspanning aan de motor kleiner dan de netspanning, zodat volgens (16) het toerental afneemt. Een bezwaar hierbij is, dat een vrij groot vermogen in de voorschakelweerstand R_v verloren gaat.

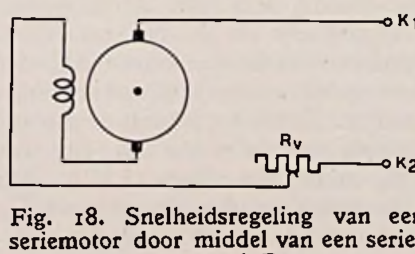


Fig. 18. Snelheidsregeling van een seriemotor door middel van een serieweerstand R_v.

f. De compoundmotor

We hebben gezien (fig. 15), dat bij toenemende belasting, dus toenemende stroom, het toerental van een shuntmotor een weinig afneemt. Dit kan worden gecompenseerd door de flux Φ een weinig te laten afnemen als de stroom I door het anker toeneemt, want om bij een kleinere flux dezelfde spanning U_i te induceren in de ankerwikkeling moet het

toerental groter zijn. Dit afnemen van de flux kan worden bereikt door de magneten te voorzien, behalve van de shuntwikkeling, van een seriewikkeling, die door de ankerstroom I wordt doorlopen in zodanige richting, dat deze stroom het veld, veroorzaakt door de shuntwikkeling, verzwakt. Een dergelijke motor wordt compoundmotor genoemd. (Bij de compounddynamo was de seriewikkeling in omgekeerde zin aangesloten; de stroom door deze wikkeling versterkte daar het veld, dat door de shuntwikkeling werd veroorzaakt.) De compoundmotor wordt zeer weinig gebruikt.

g. Ward-Leonard-schakeling

Voor die gevallen, waar een zeer nauwkeurige, soepele snelheidsregeling van een motor nodig is, zonder dat een groot vermogen verloren gaat in voorschakelweerstanden, kan de Ward-Leonard-schakeling worden gebruikt (fig. 19). De motor, die tenslotte het

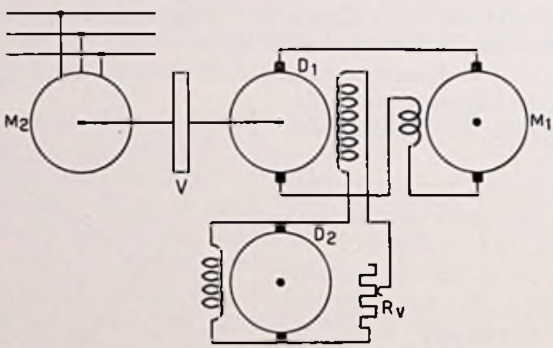


Fig. 19. Ward-Leonard-schakeling. M_1 motor, waarvan de snelheid moet worden geregeld; D_1 dynamo, die de motor M_1 voedt; D_2. dynamo, die de magneetstroom voor D_1 levert; M_2. aandrijvende driefasen-wisselstroommotor; V. vliegwiel.

mechanische vermogen levert, is een seriemotor M_1. Deze motor is verbonden met een dynamo D_1. De magneetwikkeling van deze dynamo wordt gevoed door een accumulatorenbatterij of, zoals gewoonlijk geschiedt, door een afzonderlijke dynamo D_2, die op dezelfde as is aangebracht als de dynamo D_1. De dynamo's D_1 en D_2 worden aangedreven door een motor M_2, die met het net is verbonden. Dit kan een gelijkstroomshuntmotor zijn, doch is gewoonlijk een draaistroommotor. Treden plotselinge veranderingen op in de mechanische belasting van de motor M_1, dan wordt op de gemeenschappelijke as van M_2 en D_1 een vliegwiel V aangebracht om deze stoten op te vangen. De spanning, die de dynamo D_1 levert en aan de motor M_1 wordt toegevoerd, wordt geregeld met een weerstand R_V in serie met de magneetwikkeling van de dynamo D_1. Op deze wijze is een continue

snelheidsregeling van de motor M_1 mogelijk zonder dat er een groot verlies in een voorschakelweerstand optreedt, terwijl toch de snelheid van de aandrijvende motor M_2 vrijwel constant is.

B

WISSELSTROOMMACHINES

1. De eenfasewisselstroomdynamo

We hebben gezien, dat de spanning, die in de wikkeling van het dubbel-T-anker van de inductor van Siemens wordt opgewekt, een wisselspanning is. Deze spanning kunnen we gebruiken om een wisselstroom te laten vloeien door een uitwendige belastingsweerstand, door de ankerwikkeling aan te sluiten aan twee sleepringen. Hetzelfde resultaat wordt verkregen, wanneer in plaats van een permanente magneet een electromagneet wordt gebruikt, indien door de wikkelingen van deze magneet een gelijkstroom vloeit. Deze stroom moet dan worden verkregen van een accumulatorenbatterij of van een afzonderlijke gelijkstroomdynamo, die op de as van de wisselstroomdynamo kan zijn aangebracht. Als anker wordt dan niet een dubbel-T-anker, maar een trommelanker genomen, zoals bij de andere gelijkstroommachines, dat hier echter niet is voorzien van een collector, bestaande uit vele lamellen, doch twee sleepringen draagt.

In de meeste gevallen wordt de wisselstroomdynamo echter anders geconstrueerd; de rollen van stator en rotor worden verwisseld. De rotor bestaat uit de magneten, terwijl de wikkeling, waarin de wisselspanning wordt geïnduceerd, op de stator is aangebracht. Dit wordt gedaan om de volgende redenen. De stroom door de magneetspoelen is, zoals we hebben gezien, veel kleiner dan de ankerstroom bij normale belasting van de machine. Het glijdende contact tussen de sleepringen en de borstels betekent enige weerstand in de keten. Het verdient dan ook de voorkeur de stroom, die over dit contact vloeit, zo klein mogelijk te houden. Wanneer de spanning, die de dynamo levert, hoog is, is het gemakkelijker, de statorwikkeling van een goede isolatie te voorzien dan de rotorwikkeling; op de stator is meer ruimte beschikbaar. Ook is de hoge spanning op de sleepringen ongewenst, o.a. wegens het optreden van vonken aan de borstels.

De frequentie, die in Europa bij wisselstroom gewoonlijk wordt genomen, is 50 Hz. Om deze frequentie te verkrijgen bij een tweepolige machine moet de rotor 50 omwentelingen per secunde, dus $60 \times 50 = 3000$ omwentelingen per minuut maken (het is gebruikelijk, bij machines het aantal omwentelingen niet per secunde, maar per minuut aan te geven). Deze snelheid is voor de practijk zeer groot. Daarom neemt men liever een 4- of 6-polige machine, waarbij het aantal omw./min slechts 1500 of 1000 bedraagt.

2. De driefasendynamo

Electriciteitsnetten voor wisselstroom zijn gewoonlijk driefasensystemen (zie hfdst. X). Een der redenen hiervoor is, dat driefasenmotoren eenvoudiger zijn dan éénfasemotoren (zie onder 3). De meeste wisselstroomdynamo's leveren dan ook driefasenstroom.

We denken ons weer een tweepolige machine. Het aantal poolparen is evenwel gewoonlijk groter, o.a. om de snelheid van de rotor klein te houden. De rotor bestaat weer uit een electromagneet, die een wikkeling draagt, die over sleepringen met gelijkstroom wordt gevoed. Deze gelijkstroom wordt geleverd door een betrekkelijk kleine gelijkstroomdynamo, die op de as van de wisselstroomdynamo is aangebracht. Op de stator bevinden zich drie wikkelingen, die in ster of in driehoek zijn geschakeld en die ruimtelijk over 120° ten opzichte van elkaar zijn verschoven (fig. 20). In ieder dezer wikkelingen wordt een wisselspanning opgewekt; deze spanningen bezitten dezelfde maximale waarde $\hat{U}$ en dezelfde frequentie, doch zijn ten opzichte van elkaar 120° in fase verschoven. We kunnen deze spanningen dus voorstellen door $\hat{U} \sin \omega t$, $\hat{U} \sin (\omega t + 120°)$ en $\hat{U} \sin (\omega t + 240°)$. Zijn de drie wikkelingen in driehoek geschakeld, dan is de maximale waarde van de spanning tussen ieder tweetal klemmen $\hat{U}$; zijn de wikkelingen in ster geschakeld, dan is de maximale waarde van de spanning tussen ieder tweetal klemmen $\hat{U}\sqrt{3}$, en de maximale spanning tussen ieder der klemmen en het sterpunt $\hat{U}$ (zie hfdst. X).

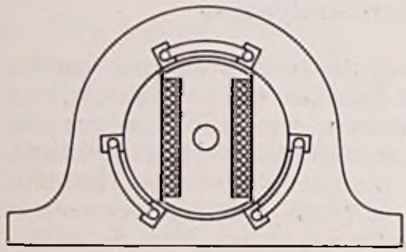


Fig. 20. Tweepolige driefasen-wisselstroomdynamo.

3. Asynchrone motoren

De meeste wisselstroommotoren zijn asynchrone motoren. De stator draagt een driefasenwikkeling S, die in gleuven is aangebracht. De drie wikkelingen zijn in ster of in driehoek geschakeld, en met het driefasennet N verbonden (fig. 21). De drie gedeelten van de wikkeling zijn, evenals bij de dynamo, langs de omtrek over 120° ten opzichte van elkaar verschoven. De rotor draagt eveneens een in driehoek of in ster geschakelde wikkeling R, waarvan de drie gedeelten ook ruimtelijk over 120° ten opzichte van elkaar zijn verschoven, en waarvan de hoekpunten met drie sleepringen zijn verbonden. De borstels zijn verbonden met drie in ster geschakelde gelijke weerstanden W, die kunnen worden geregeld tot nul, waarna de drie sleepringen worden kortgesloten. In de meeste gevallen echter bevat de rotor een kooianker (fig. 22). Daarbij zijn in openingen van de ijzeren rotor koperen

staven aangebracht, die aan de kop door koperen ringen zijn kortgesloten. Men noemt een dergelijke motor kortsluitmotor. Soms draagt de rotor twee dergelijke kortgesloten kooien; een dicht bij de omtrek van de rotor, en een tweede meer naar het midden.

Worden de drie klemmen van de statorwikkeling met de leidingen van een driefasennet verbonden, dan ontstaat er een magnetisch draaiveld (zie hfdst. X.3). We beschouwen eerst een motor, waarvan de rotor ook van een driefasenwikkeling is voorzien (fig. 21). Het magnetisch draaiveld beweegt ten opzichte van de nog stilstaande rotorwikkelingen. Daardoor worden in deze wikkelingen spanningen opgewekt, die, daar de rotorspoelen over de weerstanden *R* zijn gesloten, een stroom in ieder der rctorspoelen tot gevolg hebben. Deze spoelen trachten zich zo te plaatsen, dat zij een zo groot mogelijke flux omvatten met de richting, die bij de omloopszin van de stroom past. De rotor zal dus met het draaiveld meedraaien. Daardoor wordt de snelheid, waarmee de door de rotorspoelen omvatte flux verandert, kleiner; de geïnduceerde spanning neemt af en eveneens de daardoor veroorzaakte stroom in de rotorspoelen. De rotor zal echter steeds bij het draaiveld achter blijven; zou de rotor dezelfde snelheid bereiken als het draaiveld, dan zou de geïnduceerde spanning nul worden en ook de rotorstroom. Het koppel, dat op de rotor wordt uitgeoefend, zou daarmee eveneens nul worden. Hoe groter het mechanische koppel is, dat op de as wordt uitgeoefend, en dat de motor moet overwinnen, des te meer blijft de rotor achter bij het draaiveld. Bij een frequentie van 50 Hz van het net is het aantal omwentelingen van het draaiveld bij een vierpolige machine (zie hfdst. X fig. 6) 1500 per minuut. Maakt de rotor daarbij 1450 omw./min, dan is de *slip* $\frac{50}{1500} = 3^1/_3\ \%$.

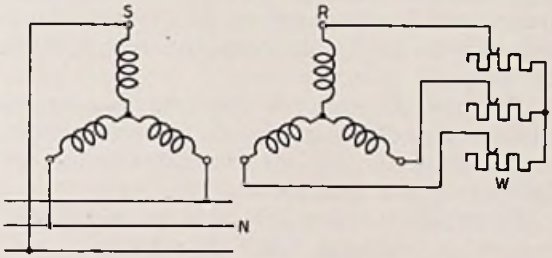


Fig. 21. Schakeling van een asynchrone motor. S. statorwikkeling; R. rotorwikkeling; N. net; W. drie gelijke, regelbare weerstanden.

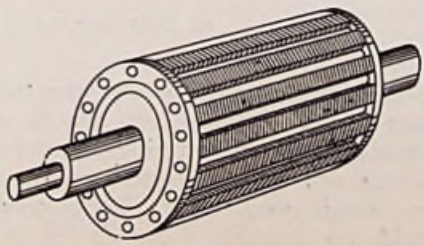


Fig. 22. Kooianker.

Hoe kleiner de weerstand in de rotorketen is, des te groter is de rotorstroom bij eenzelfde slip en des te groter zijn de krachten, die op de rotor worden uitgeoefend. Bij het aanlopen van de motor wordt de weerstand in de rotorketen groot genomen om de aanloopstroom beneden de toelaatbare grens te houden. Is de snelheid bereikt, die bij de weerstand behoort, dan is de stroom kleiner geworden. De weerstand wordt nu in stappen kortgesloten, waarbij de stroom telkens sprongsgewijze toeneemt, de slip kleiner wordt en de stroom weer geleidelijk afneemt tot ten laatste de gehele uitwendige weerstand is afgeschakeld. Bij vele motoren worden daarna de sleepringen op de motor zelf kortgesloten en de borstels van de sleepringen gelicht om ook nog de overgangsweerstand tussen de borstels en de sleepringen te ontgaan.

De meeste moderne motoren bezitten een kooianker (kortsluitmotoren), waarbij geen aanloopweerstand nodig is. Men heeft deze motoren zo kunnen construeren, dat bij het inschakelen geen ontoelaatbaar grote stromen optreden.

Er is altijd een zekere slip aanwezig, die echter hoogstens enkele percenten bedraagt. Daar de rotor niet synchroon met het draaiveld roteert, worden deze motoren asynchrone motoren genoemd. Wegens de eenvoud van bediening en de betrekkelijk eenvoudige constructie zijn het de meest gebruikte motoren.

4. Synchrone motoren

De synchrone motor is op dezelfde wijze samengesteld als de driefasen-wisselstroomdynamo. Op de stator is een driefasenwikkeling aangebracht, die op het driefasennet wordt aangesloten. De rotor bestaat uit een electromagneet, waaraan over sleepringen een gelijkstroom wordt toegevoerd. De statorstroom veroorzaakt weer een draaiveld, op dezelfde wijze als bij de asynchrone motor. De rotor wordt eerst door een op dezelfde as aangebrachte hulpmotor (gewoonlijk een kleine gelijkstroommotor) aan het draaien gebracht tot zijn snelheid overeenkomt met de snelheid, waarmee het draaiveld van de stator zal roteren. Pas daarna wordt de stator met het net verbonden. Het draaiend magnetisch veld van de stator sleept de rotor, die een magneet is, mee. De rotor blijft dan met dezelfde snelheid draaien als het draaiveld van de stator; vandaar de naam synchrone motor. Wordt de mechanische belasting van de as te groot, dan blijft de rotor te veel achter en gaat stilstaan. Een synchrone motor loopt niet vanzelf aan; hij loopt óf synchroon óf in het geheel niet.

Bij zeer kleine motoren is de rotor niet een electromagneet, doch een permanente magneet (bv. in electrische klokken).

Grote synchrone motoren worden alleen in bijzondere gevallen gebruikt.

5. Wisselstroomcollectormotoren

Bij gelijkstroommotoren hebben we gezien, dat het koppel, dat op de rotor wordt uitgeoefend, evenredig is met het product van de ankerstroom en het magnetische veld. Worden dus de richting van de ankerstroom en die van het magnetische veld beide omgekeerd, dan behoudt het koppel dezelfde richting. Hieruit volgt, dat een gelijkstroommotor in principe ook werkt bij aansluiting op een wisselstroomnet. In de practijk treden echter enige moeilijkheden op, waarvan wel de voornaamste is, dat de zelfinductie van de magneetwikkeling groot is. Bij de shuntmotor is daardoor de magneetstroom niet meer in fase met de klemspanning, doch bijna 90° in fase verschoven. Daardoor verkrijgt het magnetisch veld ook deze faseverschuiving, daar dit veld in fase is met de magneetstroom. Het koppel, dat de motor kan leveren, is dan klein. Bij de seriemotor vloeit door de magneetwikkeling dezelfde stroom als door het anker, zodat het juist genoemde faseverschil niet optreedt. Een uitvoeriger beschouwing leert echter, dat een gelijkstroomseriemotor, aangesloten op een wisselstroomnet, onbevredigend werkt en ook een klein koppel levert.

Door bijzondere maatregelen bij de constructie, o.a. door het aanbrengen van extra wikkelingen, heeft men de moeilijkheden kunnen overwinnen. Daardoor is het mogelijk, motoren te construeren voor aansluiting op een éénfasewisselstroomnet. Kleine motoren voor huishoudelijke apparaten, bv. stofzuigers, zijn gewoonlijk van dit type. Doch er zijn ook gevallen, waarbij grote motoren op een éénfasenet moeten worden aangesloten, bv. bij tractie. Ook dan worden wisselstroomcollectormotoren gebruikt. Dit was bv. vroeger het geval op de spoorlijn Scheveningen—Den Haag—Rotterdam Hofplein, waar de rijdraad werd gevoed met een wisselspanning van 25 Hz, 10 000 V. Tegenwoordig worden bij het gehele geëlectrificeerde Nederlandse spoorwegnet gelijkstroommotoren gebruikt; de spanning van de rijdraad is 1500 V.

ALPHABETISCH REGISTER

Q

R

S

T